
ciencia popular
En el reino del ingenio
E.I.Ignátiev
Uno de los primeros libros de matemáticas populares escritos en la lengua rusa: contiene una gran cantidad de problemas muy entretenidos con distintos grados de complejidad, que requieren conocimientos elementales de aritmética y geometría.
Editorial MIR
RUBIÑOS-1860, S.A.
MOSCÚ-MADRID

Extracto del Prefacio del Autor a la Edición de 1908

¿Alguien en nuestro tiempo puede comprometerse a negar la necesidad perseverante de una amplia difusión y popularización de las ciencias matemáticas? Los conocimientos matemáticos elementales deben penetrar en nuestra enseñanza y educación desde la más tierna infancia. Al mismo tiempo, es obvio que la independencia mental, la reflexión y el ingenio no se pueden "inculcar" ni "meter" en ninguna cabeza. Los resultados son seguros sólo en aquellos casos, cuando la introducción en el campo de las matemáticas transcurre de una forma fácil y agradable, basándose en objetos y ejemplos del ambiente cotidiano, seleccionados con el ingenio o interés correspondientes. Al tratar de trasladar al lector al "reino del ingenio", claro que nosotros no nos seducimos con la esperanza de que hemos conseguido mostrarle este reino en toda plenitud y encanto. Para ello m necesitarían muchos libros como éste, pues así es de enorme y amplia el área de tan sólo aquellas partes de las matemáticas que pueden incluirse bajo el titulo común do "juegos y entretenimientos matemáticos".

Un lector atento observará que el libro ha sido, en lo posible, dividido en partes, cada una de las cuales contiene problemas homogéneos distribuidos en un orden conforme al aumento de su dificultad. En general, no hay necesidad de leer y analizar todo el libro en el orden escrito. Al principio, cada lector puede escoger aquel capítulo que más le interese y analizarlo, después pasar a cualquier otro y así sucesivamente. No obstante, no podemos asegurar que la distribución del material, hecha por nosotros, satisfará a todos. Esta es una cuestión muy subjetiva: lo que a uno se le da con facilidad, para otro es difícil y viceversa. Es fácil convencerse que casi todos los problemas planteados en el libro pueden ser modificados y convertidos en objeto de conversación, incluso con niños pequeños. Por otra parte, tenemos esperanza que el presente libro pueda servir corno buen manual para el aprendizaje por cuenta propia de las matemáticas, no sólo de la juventud estudiantil, sino también de todo aquel que sienta vocación por el trabajo mental.

1908

Extracto del Prefacio del Autor a la Edición de 1911
La Importancia de la Memoria en el Estudio de las Matemáticas

Con relación a las matemáticas en nuestra sociedad aún existen los más extraños prejuicios. Unos dicen que solamente personas de gran talento, pueden dedicarse a las matemáticas; otros afirman que para ello es preciso tener una "memoria matemática" especial que permita recordar las fórmulas, etc.

Claro que no se puede negar que existen cerebros con grandes inclinaciones hacia una u otra actividad mental. Pero tampoco se puede afirmar que haya cerebros normales, absolutamente incapaces a la percepción y completa asimilación de los conocimientos matemáticos indispensables, por lo menos en la magnitud del programa para la escuela media.

Seamos justos y reconozcamos por fin que la expresión "incapaz para las matemáticas" es, ante todo, un producto amargo de nuestra inhabilidad y, posiblemente a veces, de nuestra ligereza y falta de deseo en situar la enseñanza de las matemáticas, tanto en la familia como en la escuela, a la altura correspondiente.

Es aún menos prudente hablar sobre la necesidad de una memoria exclusiva o especial para el estudio de las matemáticas, que permita retener (¿aprender de memoria?) unas fórmulas o reglas, para convertir una ciencia consciente y consecuente, en cuanto al pensamiento lógico, en un proceso mecánico e inconsciente. Mientras tanto, cuan lejos puede llegar el asunto con una actitud así, como lo atestigua el conocido matemático ruso V. P. Ermakov. He aquí lo que él comunicaba a la sociedad fisicomatemática de Kiev en uno de sus informes.

"Cuando enseñaba a los estudiantes el cálculo integral, ya durante el primer año tuvo lugar un episodio que quedó en mi memoria para siempre.

Después de exponer parte de la teoría, para aclararla, planteo problemas. Propongo a los estudiantes que resuelvan estos problemas en sus cuadernos y a medida que se van resolviendo escribo los resultados en la pizarra. Un día, con el fin de aclarar los procedimientos para la reducción de integrales binominales, escribí en la pizarra un problema adecuado. Al momento observo que algunos estudiantes sacan de los bolsillos unas libretas y las consultan.

- ¿Qué es eso?

- Las fórmulas generales.

- ¿Para qué?

- A nosotros el profesor anterior nos aconsejó tener una lista de las fórmulas generales y por ellas resolver ejercicios particulares. Pues no va usted a exigir que aprendamos de memoria las cuarenta fórmulas generales.

- En matemáticas no es necesario aprender de memoria ninguna fórmula. Pero considero también innecesario utilizar material de consulta para hallar integrales, mediante fórmulas generales, introduciendo en ellas los valores de los exponentes y coeficientes. Pues como no nos han caído del cielo las fórmulas generales, ya que para su deducción ustedes utilizaron una serie de razonamientos, utilicen los mismos razonamientos en la resolución de los ejercicios particulares.

De tal forma, resultó posible hallar cualquier integral sin necesidad de utilizar las fórmulas generales, aunque fue preciso modificar algunos cálculos de tal manera que pudieran ser aplicados directamente a los ejemplos particulares.

Se tuvo también la ventaja que en cada ejercicio particular los estudiantes repetían los mismos razonamientos, necesarios para deducir la fórmula general. A consecuencia de ello fueron adquiriendo cierto hábito y, como resultado, rapidez en la resolución de los ejercicios.

Este episodio me obligó a profundizar más en la naturaleza de las matemáticas.

Siendo joven, yo también dedicaba toda la atención a los resultados finales. Al examinar una demostración, procuraba cerciorarme solamente de su rigurosidad. ¡Llegar al resultado final y basta! Después me esmeraba en recordar las conclusiones finales, ya que el proceso de la demostración se me esfumaba rápidamente. Pero con el tiempo, olvidaba también las fórmulas, que con frecuencia resultaban necesarias en la continuación de mis estudios. ¿Qué remedio me quedaba? ¿Formar una biblioteca de manuales? Pero para ello no tenía los medios suficientes y además no disponía de un local adecuado. Forzosamente me vi obligado a recordar el proceso mediante el cual se deducía una u otra fórmula. Así, pues, en lugar de fórmulas, poco a poco pasé a sus deducciones. Resultó que era más fácil recordar el proceso del cálculo matemático que simplemente las fórmulas como tales. Además no era necesario memorizar todo el proceso, sino que bastaba con trazar los puntos de las etapas por las cuales debería dirigirse el pensamiento. Desde entonces, hace ya varios años que afirmo a mis oyentes que en las matemáticas deben recordar no las fórmulas sino, el proceso de su deducción.

Después de exponer uno u otro capitulo de la geometría analítica, les dicto a los estudiantes el contenido de los apuntes en los cuales sin dar fórmulas, enuncio los puntos principales del cálculo.

Si está claro el proceso del cálculo matemático, la obtención de las fórmulas es ya un hecho simplemente mecánico. En cuanto al mecanismo de las operaciones algebraicas, los estudiantes deben obtener ya hábito en la escuela media. Llegué a la convicción que el principio expuesto por mí debe ser utilizado en la escuela media..."

Continuemos la idea de V. P. Ermakov y digamos que el principio indicado debe ser tomado como base para la enseñanza en el tren de las matemáticas, tanto en la familia, como en la escuela. No se empeñen en enseñarles a niños o jóvenes el estudio de distintas "tablas" de sumar, restar, multiplicar; en la memorización mecánica de diferentes "reglas" y fórmulas, sino que, ante todo, acostúmbrenles a pensar con placer y conciencia. Lo demás se añadirá con el tiempo. No molesten a nadie con cálculos y ejercicios mecánicos muy largos y aburridos.

Cuando a alguien le sean necesarios en la vida, los hará por sí solo. Además ahora para ello hay distintas máquinas calculadoras, tablas y otros dispositivos.

1911

Prefacio de los Redactores a la Segunda Edición

El libro de E. I. Ignátiev, “En el reino del ingenio", escrito a principios de siglo, es una de las primeras obras populares sobre matemáticas editadas en ruso. En ella encontramos gran cantidad de problemas de carácter recreativo, con diferente grado de dificultad. Por regla general, estos problemas se resuelven utilizando mínimos conocimientos de aritmética y geometría, pero requieren reflexión y un modo de pensar lógico.

El libro está destinado a un círculo de lectores muy amplio. Con satisfacción y utilidad lo leerán los alumnos de escuelas primarias y secundarias. Los padres encontrarán en él ejercicios interesantes para el desarrollo de la reflexión en niños de edad preescolar. Una parte de los problemas representan interés también para lectores adultos. Dentro de cada capítulo los problemas están distribuidos en un orden conforme al aumento de la dificultad de su resolución. Posiblemente, a los lectores adultos algunos de ellos les parezcan conocidos. Esto es debido a que muchos problemas del libro de E. I. Ignátiev fueron incluidos en ediciones posteriores, difundiéndose ampliamente.

En los 70 años transcurridos desde el momento en que E. I. Ignátiev escribiera su libro, tuvieron lugar grandes cambios en la estructura civil y social de nuestro país. Los planteos de muchos problemas, que reflejan las relaciones reales del siglo pasado (siglo XIX), al lector contemporáneo le parecerán extraños. Hemos recompuesto parte de estos problemas esforzándonos en actualizarlos, utilizarlos como historias y cuentos viejos. Al mismo tiempo, en la medida posible hemos conservado el lenguaje metafórico del autor. Han sido eliminados algunos capítulos a nuestro juicio no muy interesantes para el lector contemporáneo. Al mismo tiempo, ha sido añadida una pequeña cantidad de problemas de temática semejante.

Por su estructura la presente edición se diferencia de la anterior (M., "Naúka, 1978"). A solicitud de los lectores hemos separado la solución de los problemas, consejos y algunos comentarios en un capítulo aparte. Procurando que el libro sea comprensible para todos, en la nueva edición se ha conservado el término "figuras iguales", intuitivamente claro. Tanto más que en el libro no se trata de construcciones matemáticas formalizadas; los triángulos y cuadrados que se examinan, por regla general, son trozos de papel ordinario.

M. K. Potápov, Yu. V. Nesternko.
1978

Capítulo 1
Problemas-bromas, problemas-acertijos e historias graciosas

1. El reparto
Repartir cinco manzanas entre cinco personas, de tal forma que a cada persona le toque una manzana y que una manzana quede en la cesta.

2. ¿Cuántos gatos?
El cuarto tiene cuatro ángulos. En cada ángulo está sentado un gato. Frente a cada gato hay sentados tres gatos. En cada rabo esté sentado un gato. ¿Cuántos gatos hay en total en el cuarto?

3. El sastre
Un sastre tiene un trozo de paño de 16 metros del cual corta cada día un trozo de dos metros. ¿Al cabo ele cuántos días el sastre cortará el último trozo?

4. El número 666
Aumentar el número 666 a una vez y media sin realizar con él ninguna clase de operaciones aritméticas.

5. El quebrado
¿Puede un quebrado, en el que el numerador es menor que el denominador, ser igual a otro quebrado en el que el numerador es mayor que el denominador?

6. Partir una herradura
Con dos golpes de hacha partir una herradura en seis pedazos, pero sin mover los pedazos después de dar el golpe.

7. ¿Qué dijo el anciano?

Dos jóvenes cosacos, excelentes jinetes, con frecuencia hacían apuestas de quién adelantaría a quién. Más de una vez, bien uno bien otro, salía victorioso pero, al fin y al cabo, esto les aburrió.

- Mira -dijo Grigori- vamos a apostar al contrario. Ganará la apuesta aquél, cuyo caballo llegue a la meta segundo.

- Bueno - respondió Mijail.

Los cosacos montaron en sus caballos y salieron a la estepa. Se reunió una multitud de espectadores: todos querían presenciar una apuesta tan extraña. Un viejo cosaco comenzó a contar dando palmadas:

- ¡Uno!... ¡Dos!... ¡Tres!...

Pero los competidores, claro está, ni se movieron de sus sitios El público comenzó a reír, criticar y discutir, decidiendo que una apuesta así era imposible y que los competidores permanecerían en sus sitios, como se dice, hasta el fin de los siglos.

En este momento, a la muchedumbre se acercó un anciano canoso, muy experto en cosas de la vida.

- ¿Qué pasa? - preguntó. Le explicaron la situación.

- ¡Pues, veréis! - dijo el anciano - bastará con unas palabras que yo les diga para que se lancen a galope como si les hubiesen escaldado.

Y efectivamente… se acercó el anciano a los cosacos, les dijo unas palabras y al cabo de medio minuto los cosacos salieron galopando desesperadamente por la estepa, empeñados en adelantar uno al otro a todo trance. Pero la apuesta de todos modos, la ganó el jinete cuyo caballo llegó segundo.

¿Qué le dijo el anciano a los cosacos?

Capítulo 2
Ejercicios con Cerillas

Consiga una caja de cerillas. Con ellas podrá inventar una serie de ejercicios, divertidos e ingeniosos, que le ayudarán a desarrollar la reflexión y el pensamiento. He aquí, por ejemplo algunos de los más simples.

8. Cien

Adjuntar a las cuatro cerillas (fig. 1) cinco cerillas más de tal forma que obtengamos cien.

La solución de este ejercicio se da en la fig. 2.

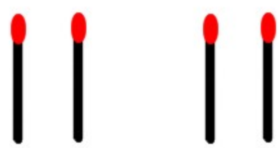


Figura 1

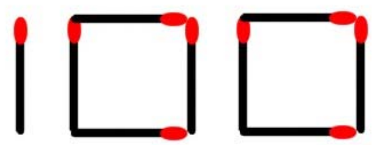


Figura 2

9. Ocho

A siete cerillas (fig. 3) añadirles otras siete, de tal forma que obtengamos ocho.

Figura 3

10. La casa

Se ha construido una casa utilizando cerillas (fig. 4). Cambiar en ella la posición de dos cerillas, de tal forma que la casa aparezca de otro costado.

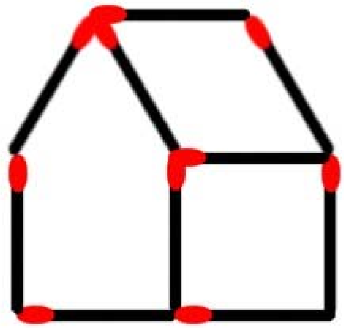


Figura 4

11. El cangrejo.

Un cangrejo de cerillas camina hacia arriba (fig. 5). Cambiar la posición de tres cerillas, de tal forma que el cangrejo camine hacia abajo.

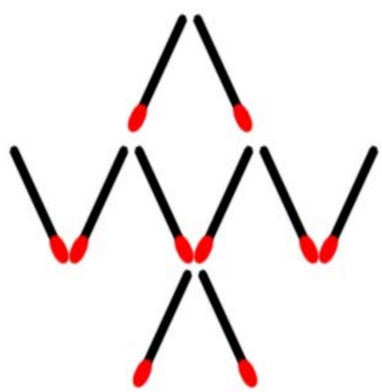


Figura 5

12. La balanza.

Una balanza, compuesta por nueve cerillas se halla en estado de desequilibrio (fig.6). Es preciso cambiar la posición de cinco cerillas, de tal forma que la balanza quede en equilibrio.

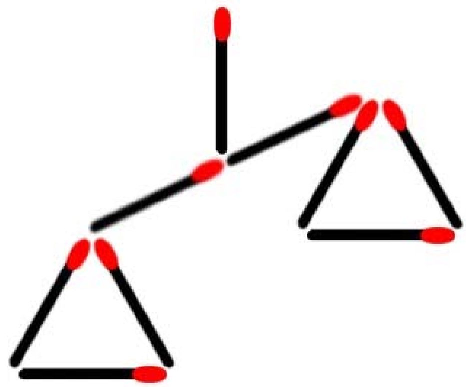


Figura 6

13. Dos copas.

En dos copas, hechas con diez cerillas (fig. 7), cambiar la posición de seis cerillas, de tal modo que resulte una casa

Figura 7

14. El templo

Para edificar este templo griego (fig. 8) se necesitaron once cerillas. Se requiere cambiar en él la posición de cuatro cerillas, de tal forma que resulten quince cuadrados.

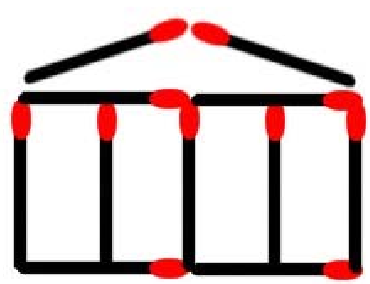


Figura 8

15. La Veleta

En una veleta, hecha con diez cerillas (fig.9), es preciso cambiar de posición cuatro cerillas, de tal forma que se transforme en una casa.

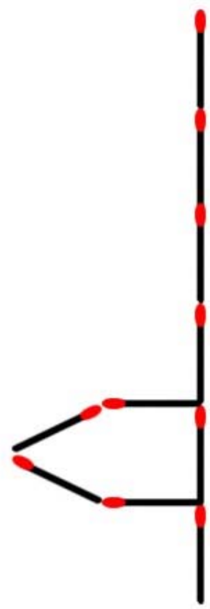


Figura 9

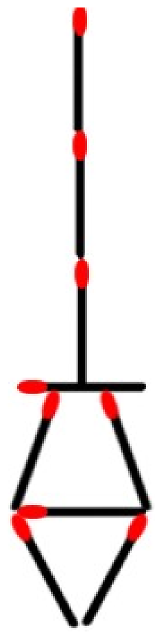


Figura 10

16. El farol.

Cambiando la posición de seis cerillas, es preciso transformar un farol (fig.10), en cuatro triángulos iguales.

17. El hacha

Cambiando de posición cuatro cerillas, transformar un hacha (fig.11), en tres triángulos iguales.

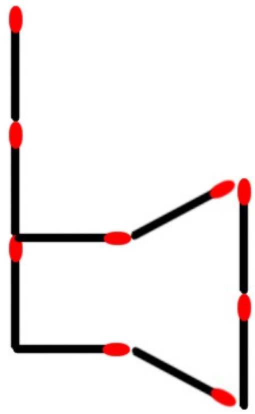


Figura 11

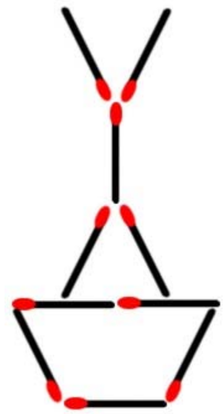


Figura 12

18. La lámpara

En una lámpara, compuesta por doce cerillas, (fig.12), cambiar la posición de tres cerillas, de tal forma que resulten cinco triángulos iguales.

19. La llave

Una llave está hecha con diez cerillas (fig.13). Cambiar de lugar en ella cuatro cerillas, de tal forma que resulten tres cuadrados.

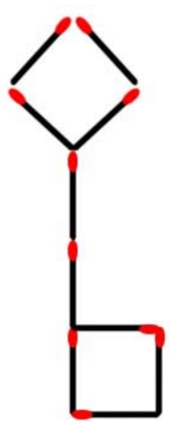


Figura 13

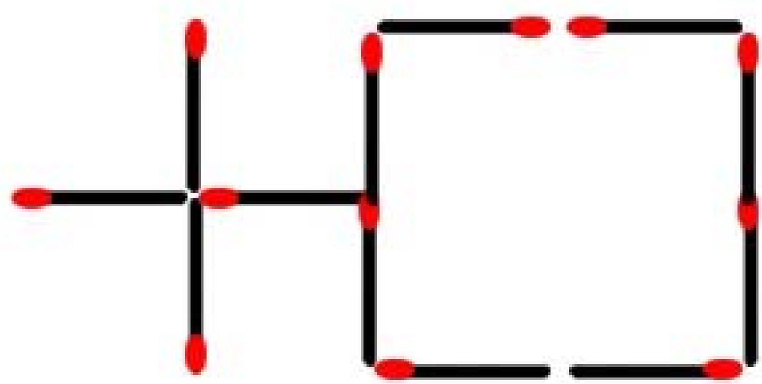


Figura 14

20. Tres cuadrados

En el dibujo mostrado en la fig.14, cambiar la posición de cinco cerillas, de tal forma que resulten tres cuadrados.

21. Cinco cuadrados

Las cerillas están puestas según la fig.15. Cambiar la posición de dos cerillas con el fin de obtener, cinco cuadrados iguales.

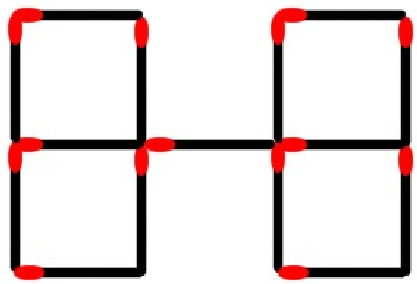


Figura 15

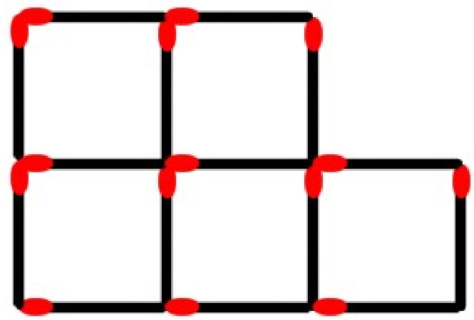


Figura 16

22. Tres cuadrados

En el dibujo representado en la fig. 16, quitar tres cerillas de tal forma que resulten tres cuadrados iguales.

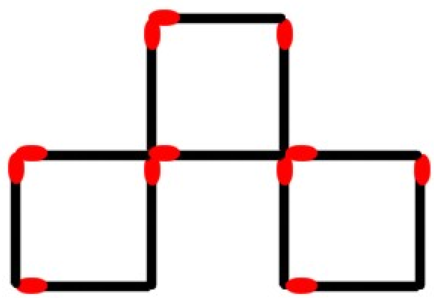


Figura 17

23. Dos cuadrados

En el dibujo representado en la fig. 17, cambiar la posición de cinco cerillas, de tal forma que resulten sólo dos cuadrados.

24. Tres cuadrados

En el dibujo de cerillas dado en la fig.18, trasladar tres cerillas, de tal forma que resulten tres cuadrados iguales.

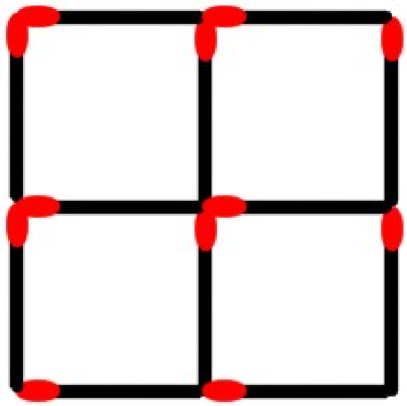


Figura 18

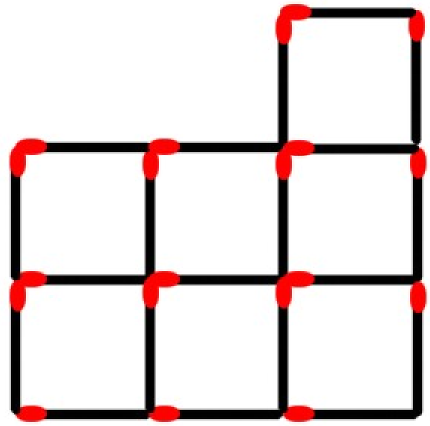


Figura 19

25. Cuatro cuadrados

El dibujo representado en la fig.19, está formado por cerillas. Cambiar en él la posición de siete cerillas de tal forma que resulten cuatro cuadrados.

26. Cuadrados

En la fig. 20, quitar ocho cerillas, de tal forma que:

1. queden sólo dos cuadrados
2. queden cuatro cuadrados iguales

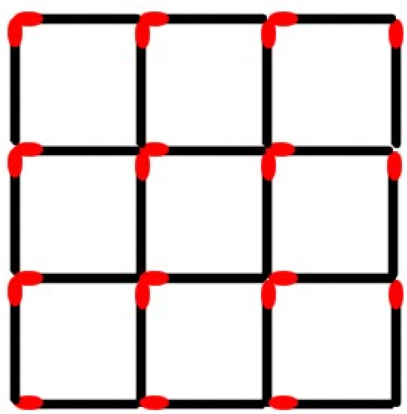


Figura 20

27. Cuatro triángulos

Con seis cerillas construir cuatro triángulos equiláteros iguales.

28. Levantar quince cerillas con una cerilla

Coloque 16 cerillas de tal forma que todas ellas puedan ser levantadas sujetando una sola cerilla.

Capítulo 3
¿Como Calcular?

29. El movimiento del dedo

Un niño se quejaba que le era difícil retener en la memoria la tabla de multiplicar de los primeros diez números por 9. Su padre halló un método muy fácil para ayudar a la memoria utilizando loa dedos de las manos. He aquí este método.

Poner las dos manos juntas sobre la mesa y estirar los dedos. Supongamos que cada dedo, en orden sucesivo, representa el número correspondiente: el primero a la derecha, el 1; el segundo, el 2; el tercero, el 3; el cuarto, el 4, y así sucesivamente hasta el décimo, que representará al número 10. Ahora podemos hacer la multiplicación de cualquiera de los primeros diez números por el número 9. Para ello, sin mover las manos puestas sobre la mesa, se deberá alzar solamente aquel dedo quo representa el número que querernos multiplicar. Entonces, los dedos situados a la izquierda del dedo alzado, darán en suma el número de decenas y los situados a la derecha, el número de unidades.

Multipliquemos, por ejemplo, 7 por 9. Poner las manos sobre la mesa y alzar el séptimo dedo. A su izquierda quedarán 6 dedos y a su derecha, 3.

Entonces, el resultado de la multiplicación de 7 por 9 será igual a 63.

Este, a primera vista, sorprendente método de multiplicación mecánica, enseguida se hace comprensible si examinamos la tabla de multiplicar de los primeros diez números por 9:

1 x 9 = 09	6 x 9 = 54
2 x 9 = 18	7 x 9 = 63
3 x 9 = 27	8 x 9 = 72
4 x 9 = 36	9 x 9 = 81
5 x 9 = 45	10 x 9 = 90

Aquí las cifra, de las decenas, en las multiplicaciones, van aumentando sucesivamente en una unidad: 0, 1, 2, 3, 4,..., 8, 9 mientras que las cifras de las unidades, por el contrario, disminuyen en una unidad: 9, 8, 7,..., 1, 0. La suma de las cifras de unidades y decenas, en cualquier caso, dan 9. Esto se consigue con el simple levantamiento del correspondiente dedo y así... multiplicamos. La mano de la persona es una de las primeras máquinas calculadoras.

30. Un recorrido por el océano

Diariamente, al mediodía, un buque sale del puerto de El Havre con dirección a Nueva York a través del océano Atlántico y, al mismo tiempo, otro buque (de la misma Compañía sale de Nueva York con dirección a El Havre. El recorrido en una y otra dirección se realiza al cabo de 7 días exactamente. ¿Con cuántos buques de la misma compañía que naveguen en dirección contraria, se encontrará un buque durante un recorrido de El Havre a Nueva York?

31. La venta de manzanas

Una campesina trajo al mercado una cesta de manzanas. Al primer comprador le vendió la mitad de todas las manzanas y media manzana más, al segundo, la mitad de las restantes y media manzana más, al tercero, la mitad de las restantes y media manzana más y así sucesivamente. Cuando llegó el sexto comprador y compró la mitad de las manzanas que le quedaban y media manzana más, resultó que él y que los demás compradores tenían todas las manzanas enteras y que la campesina había vendido toda su mercadería. ¿Cuántas manzanas trajo la campesina al mercado?

32. La oruga

El domingo, a las seis de la mañana, una oruga comienza a subir por un árbol. Durante el día, o sea, hasta las 18 horas, sube a una altura de 5 m, mientras que durante la noche baja 2 metros. ¿Al cabo de cuántos días y a qué hora, la oruga alcanza la altura de 9 metros?

33. Dos ciclistas y una mosca

Dos ciudades, A y B, se encuentran a una distancia de 300 km. De estas ciudades, salen dos ciclistas al encuentro uno de otro, avanzando a una velocidad de 50 km/h. Junto con el primer ciclista de la ciudad A, sale volando una mosca a una velocidad de 100 km/h. La mosca adelanta al primer ciclista y vuela el encuentro del segundo, que partió de B. Al encontrarse con él, la mosca da la vuelta en dirección al ciclista A. Encontrándose con éste, da nuevamente la vuelta hacia of ciclista B y así continúa sus vuelos, hacia adelante y hacia atrás, hasta que los ciclistas se encuentran. Después la mosca se tranquiliza y se posa en la gorra de uno de los ciclistas. ¿Cuántos kilómetros vuela la moca?

34. Un perro y dos caminantes

Dos caminantes van por un mismo camino en una misma dirección. El primero adelanta en 8 km al segundo y marcha a una velocidad de 4 km/h; el segundo hace 6 km a la hora. Uno de los caminantes tiene un perro el cual, precisamente en el momento en quo comenzamos a vigilarles, echó a correr de su amo en dirección al otro caminante a una velocidad de 15 km/h.

Después de alcanzarlo regresó al lado de su amo y nuevamente corrió donde el segundo caminante. Así continuó corriendo de un caminante a otro hasta que éstos se juntaron. Es preciso determinar el trayecto (la distancia total) recorrido por el perro.

35. Rápida elevación el cuadrado

Existe un procedimiento muy simple para elevar al cuadrado, de forma oral y rápida, números de dos cifras terminados en 5. Para ello, se debe multiplicar el número de decenas por el número entero mayor y más cercano a este número de decenas y al resultado se le añade la cifra 25.

Por ejemplo, $35^2 = 1225$; $85^2 = 7225$.

Explíquese la razón.

36. Un número interesante

Cierto número termina en 2. Cambiando de lugar esta cifra y poniéndola al principio, el número se duplica. Hállese este número.

37. Hallar un número

Hallar un número, cuya división por 2 da un resto de 1; por 3, un resto de 2; por 4, un resto de 3: por 5, un resto de 4; por 6, un resto de 5, mientras que por 7 se divide sin resto.

38. Suma de números consecutivos

Para resolver este problema se pueden utilizar fichas de papel, que pueden ser recortadas con facilidad, con circulitos dibujados a lápiz o a tinta. En la primera ficha se hace un circulito, en la segunda, 2 circulitos, en la terrera, 3 y así sucesivamente hasta diez. Cada ficha debe hacerse en dos ejemplares. Después de ello estaremos en plenas condiciones para resolver el problema siguiente.

Tenemos diez fichas, de una a diez. Es preciso determinar cuántos puntos en total dan estas fichas sin proceder a una suma sucesiva de los puntos de la primera a los de la segunda, el resultado de esta suma a los puntos de la tercera. etc., es decir, sin hacer una fila de sumas consecutivas.

La cuestión consiste en determinar rápidamente y sin proceder a sumas consecutivas, la suma total de los primeros diez números (de 1 a 10). Para ello, colocamos en fila diez fichas: de la primera a la décima. Debajo de esta fila colocamos otras diez fichas, pero en orden inverso:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Resultan dos filas, cada una de diez fichas, o diez columnas de dos fichas cada una. Si contamos los puntos de cada columna, resultan ser 11. En total en las diez columnas, o sea en las dos filas de fichas, tenemos diez veces once puntos, o sea 110. Pero, es evidente que las filas tienen la misma cantidad de puntos. Resulta, pues, que la suma de todos los puntos de una fila es igual a la mitad de 110, o sea, 55. Es decir, diez fichas suman 55 puntos.

No es difícil comprobar que de la misma forma, sin proceder a sumas consecutivas, podemos hallar la suma de cualquier serie de números enteros consecutivos hasta un número determinado. Por ejemplo, la suma de todos los números de 1 a 100 es igual a la mitad de 101 multiplicado por 100, o sea, 5050.

39. La recolección de manzanas

Cien manzanas están dispuestas en fila a la distancia de un metro una de otra. A la misma distancia de la primera manzana, o sea, a un metro, el jardinero ha puesto una cesta. Se pregunta: ¿cuál será la longitud del recorrido que hará el jardinero si decide recoger las manzanas una por una conforme están en fila y llevarlas cada vez a la cesta inmóvil, por separado?

40. El reloj de campana

¿Cuántos golpes da un reloj de campana durante un día?

41. Suma de números naturales

¿Cómo hallar la suma de los *n* primeros números naturales?

Con casos particulares de este problema ya nos encontramos antes. Veamos ahora la idea de su resolución geométrica. Dibujamos un rectángulo; dividimos uno de sus lados en n partes iguales y su base n+1 partes. Desde los puntos divisorios trazamos líneas paralelas a los lados del rectángulo. Obtenemos una red que divide el rectángulo en $n(n+1)$ rectángulos pequeños e iguales (fig. 21).

El dibujo está calculado para el caso $n = 8$. Rayarnos, a continuación, las casillas como se ve el dibujo. La cantidad de casillas rayadas se expresa por la suma

$$n + (n - 1) + (n - 2) + ...3 + 2 + 1$$

Pero la cantidad de casillas blancas, si es cuentan por columnas de derecha a izquierda, es igual a la misma suma.

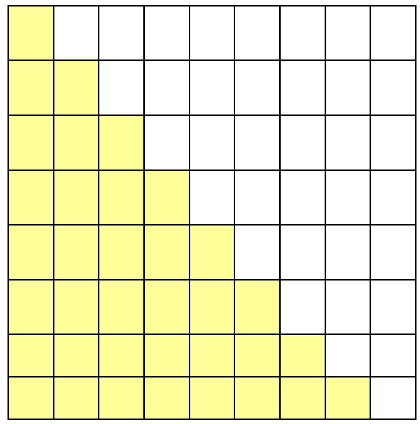


Figura 21

Entonces,

$$2\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n\,(n+1)$$

de aquí obtenemos la respuesta:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n^{n(n+1)/2}$$

42. Suma de números impares

$$1 = 1^2$$
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

Posiblemente esta regularidad (la suma de números impares, tomados en orden sucesivo comenzando por 1, es igual el cuadrado de la cantidad de estos números) se conserve más adelante. ¿Cómo comprobarlo?

Capítulo 4
Pasos y cruces

43. Cómo pasar un foso

Un campo cuadrangular está rodeado por un foso, cuya anchura es igual en todas partes (fig. 22). Tenemos dos tablas con un largo de cada una de ellas exactamente igual al ancho del foso. ¿Cómo pasar el foso utilizando estas dos tablas?

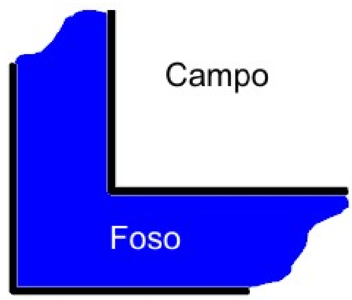


Figura 22

44. Un destacamento de soldados

Un destacamento de soldados tiene que pasar indispensablemente un río. Pero el puente está destruido y el río es profundo. ¿Qué hacer? De pronto el comandante ve dos niños navegando en una barca no lejos de la orilla. Pero la barca es tan pequeña que en ella pueden cruzar el río al mismo tiempo un soldado o los dos niños Y nadie más. No obstante, todos los soldados pasaron el río precisamente en dicha barca. ¿Cómo lo consiguieron?

45. El lobo, la cabra y la berza

Un campesino necesita pasar un río con un lobo, una cabra y unas berzas. Pero la barca es tan pequeña que en ella cabe el campesino y con él solamente el lobo, o la cabra, o las berzas. Si deja al lobo con la cabra, el lobo se come la cabra; si deja a la cabra con las berzas, la cabra se come las berzas. ¿Cómo pasó el campesino su carga?

46. Paso de tres caballeros con sus escuderos

Tres caballeros, cada uno acompañado de su escudero, se reunieron a la orilla de un río con la intención de pasar a la otra margen. Consiguieron encontrar una barca pequeña de dos asientos, con la cual el paso del río podía realizarse con facilidad, ya que los caballos podían hacerlo a nado. Pero, un obstáculo por poco impidió hacerlo. Todos los escuderos, como si lo hubiesen acordado, se negaron rotundamente a quedarse en compañía de caballeros desconocidos sin sus amos. No valieron promesas ni amenazas. Los cobardes escuderos testarudamente se mantuvieron en lo suyo. Y sin embargo, el paso del río tuvo lugar. Las seis personas pasaron a la otra orilla sin novedad, utilizando la barca de dos asientos y además cumpliendo la condición requerida por los escuderos. ¿Cómo lo hicieron?

47. Paso de cuatro caballeros con sus escuderos

¿Seria posible pasar el río observando las mismas condiciones, si a su orilla se reuniesen cuatro caballeros con sus escuderos?

48. Paso en una barca de tres asientos

Cuatro caballeros con sus escuderos llegan a la orilla de un río en la que hallan una barca de tres asientos. ¿Podrán pasar a la otra orilla observando las condiciones de los problemas anteriores?

49. Paso de un río con una isla

Cuatro caballeros con sus escuderos necesitan pasar un río en una barca, sin remero, en la que caben no más de dos personas.

En el medio del río hay una isla en la que se puede desembarcar. ¿Cómo deberán obrar para pasar el río de tal forma que ni en las orillas, ni en la isla, ni en la barca ningún escudero se encuentre en compañía de caballeros extraños sin la presencia de su amo?

50. En una estación del ferrocarril

El tren A se aproxima a una estación, pero le va alcanzando otro tren A, que lleva más velocidad y al cual es preciso dejar pasar. En la estación hay un desvío al que se pueden apartar temporalmente los vagones de la vía principal. Pero este desvío es tan corto quo en él no entran todos los vagones del tren B. Se pregunta: ¿cómo dejar pasar al tren A?

51. Cruzamiento de seis barcos

Por un canal, navegan tres barcos: A, B, C, en fila. A su encuentro, también en fila, aparecen otros tres barcos: D, E, F, El ancho del canal es tal que no permite realizar el cruce de dos barcos, pero, por una orilla, el canal tiene una bahía en la que puede caber un solo barco. ¿Podrán cruzar los barcos y de tal forma continuar su marcha?

Capítulo 5
Repartos en circunstancias difíciles

52. Partes grandes en lugar de pequeñas

Dividir en partes iguales 5 rosquillas entre seis niños, pero sin cortar ninguna rosquilla en seis partes iguales.

Problemas semejantes se pueden inventar cuantos se quieran. Así, por ejemplo, en este problema en lugar de 5 rosquillas y 6 niños se puede poner 7 rosquillas y 6 niños; 7 y 10; 9 y 10; 10 y 11 y 13 y 10; 7 y 12; 11 y 12; 13 y 12; 9 y 14; 11 y 14; 13 y 14; 15 y 14; 17 y 14, etc.

En todos los problemas de esta clase las partes pequeñas deben transformarse en partes más grandes. Variar estos problemas se puede de muchas formas, por ejemplo, proponiendo preguntas como ésta:

¿Se puede dividir 5 pliegos de papel entre ocho escolares, no dividiendo ningún pliego en ocho partes?

Estos problemas son muy útiles para la comprensión clara y rápida del contenido de los quebrados.

53. ¿Quién tiene razón?

Dos leñadores, Nikita y Pável, desde la madrugada trabajaban en el bosque y se sentaron a desayunar. Nikita tenía 4 panecillos y Pável, 7. En ese momento se les acerca un cazador.

- ¿Mirad!, compañeros, me he extraviado en el bosque, mi aldea queda lejos y tengo muchas ganas de comer, dividid conmigo vuestro desayuno!

- Bueno, pues siéntate; dividiremos lo que tenemos, le respondieron Nikita y Pável.

Los 11 panecillos fueron divididos en parles iguales entre los tres. Después de desayunar el cazador buscó en los bolsillos, encontró dos monedas, una de 10 kopeks y otra de 1 kopek, y dijo:

- ¡Dispensadme, compañeros, no tengo más dinero! ¡Dividid esto como os parezca!

El cazador se fue y los leñadores comenzaron a razonar. Nikita propuso.

- ¡A mi juicio, debemos dividir el dinero en dos partes iguales!

Pero Pável respondió:

- Por 11 panecillos 11 kopeks, Por cada panecillo un kopek. Tú tenías cuatro panecillos, a ti te corresponden 4 kopeks; yo tenía 7 panecillos, a mi me corresponden 7 kopeks.
¿Quién de los dos hizo bien la cuenta?

54. Una discusión

Tres campesinos, Iván, Piotr y Nikolai, por un trabajo que realizaron recibieron un saco de trigo. Desgraciadamente no tenían a mano medida alguna y se vieron obligados a dividir el trigo a ojo. El más viejo de los campesinos, Iván, dividió el trigo en tres montones, a su parecer, iguales:
- Toma tú el primer montón, Piotr, el segundo que lo coja Nikolai y el tercero será para mí.
- Yo no estoy conforme, se opuso Nikolai, pues mi montón de trigo es el más pequeño.
Discutieron los campesinos, Por poco no riñen. Pasaban trigo del primer montón al segundo, del segundo al tercero, pero de ninguna forma podían llegar a un acuerdo; siempre alguno de ellos quedaba desconforme.
- Si fuésemos dos, yo y Piotr, exclamó indignado Iván, en un instante lo dividiría, liaría dos montones de trigo iguales y propondría a Piotr escoger cualquiera de ellos, yo me llevaría el que quedase. Así los dos estaríamos satisfechos. Pero aquí, no sé qué hacer.
Se pusieron a pensar los campesinos cómo dividir el trigo de tal forma que todos quedasen satisfechos, que cada uno estuviese seguro que recibió no menos de la tercera parte. Y lo resolvieron.
Resuélvanlo también ustedes.

55. Reparto entre tres

Tres mercaderes deben repartir entre sí 21 barricas, de las cuales, 7 están totalmente llenas de kvas (bebida rusa fermentada); 7 están llenas hasta la mitad y 7 vacías. Se pregunta, cómo dividir estas barricas de tal forma, que a cada mercader le corresponda la misma cantidad de kvas y la misma cantidad de barricas, sin pasar kvas de una barrica a otra.

56. Reparto entre dos

Dos personas deben repartir, en partes iguales, 8 calderos de kvas, depositado en una barrica grande. Pero para ello tienen solamente dos barricas, en una de las cuales caben 5 calderos y en otra, 3 calderos. ¿Podrán dividir el kvas utilizando solamente estas tres barricas?

57. Reparto por mitades

¿Qué hacer si, manteniendo las condiciones del problema anterior, las barricas vacías tienen capacidades de 11 y 6 calderos respectivamente, y en la barrica grande hay 16 calderos de kvas?

58. Reparto de kvas

Tenemos tres barricas con una capacidad de 6 calderos, 3 calderos y 7 calderos, respectivamente. La primera contiene 4, y la tercera, 6 calderos de kvas, Es preciso repartir el kvas en dos partes iguales utilizando solamente estas tres barricas.

Capítulo 6
Cuentos e historias antiguas

59. De cómo un ganso y una cigüeña resolvieron un problema

Volaba una bandada ale gansos y a su encuentro un solo ganso: "¡Hola, cien gansos!" saluda el ganso a la bandada de gansos. Un ganso ya viejo, que volaba a la cabeza de la banda, le responde: "¡No, no somos cien gansos! Pero si fuésemos otros tantos, más la mitad, más la cuarta parte y también tú, ganso, entonces seríamos cien gansos. Pero ahora... ¡Calcúlalo tú, cuántos somos!"

Siguió volando el ganso solitario y se puso a pensar. ¡En efecto! ¿Con cuántos hermanos gansos se encontró? Pensaba y pensaba el ganso, pero por más cálculos que hacía no podía resolver el problema. De pronto vio a la orilla de un estanque, una cigüeña; vagaba la zancuda en busca de ranas. La cigüeña es un ave arrogante, que goza entre otras aves de fama como matemática; pasa días enteros pensando, a veces inmóvil sobre una pata, por lo visto, resolviendo problemas. Se alegró el ganso, bajó al estanque, nadó hacia la cigüeña y le contó cómo se había encontrado con una bandada de hermanos gansos y el problema que le había planteado el ganso-guía, que no podía resolver de ninguna forma.

-¡Bueno! - dijo con importancia la cigüeña, probaremos resolverlo. Pero estate atento y esmérate en comprenderme. ¿Me escuchas?

Figura 23

- ¡Te escucho y me esmeraré!, respondió el ganso.
- Entonces... ¿cómo te dijeron? ... Si a los gansos con que te encontraste agregases otros tantos, más la mitad, más la cuarta parte y también a ti, entonces serían cien gansos. ¿Así?
- ¡Así! respondió el ganso.
- Ahora- dijo la cigüeña, mira lo que voy a trazar en las arenas de esta orilla.

La cigüeña encorvó el pescuezo y con el pico trazó una raya, al lado otra igual, luego otra igual a la mitad y otra igual a la cuarta parte de las primeras, por último otra pequeñita, casi como un punto. Resultó lo mostrado en la fig. 23. El ganso nadó hasta la misma orilla, salió tambaleándose a la arena, miró, pero no comprendió nada.

- ¿Comprendes? -preguntó la cigüeña.

- ¡Todavía no!- respondió con tristeza el ganso.

- ¡Vaya! Pues mira: conforme te dijeron,"una banda más otra banda más la mitad de una banda más la cuarta parte de una banda y también tú, ganso", así lo he dibujado yo una raya, más otra raya, más media raya, más un cuarto de raya y por último una rayita pequeña, es decir, a ti, ¿Comprendiste?

- ¡Sí, comprendo! -con alegría respondió el ganso.

¿Si a la banda con que te encontraste añades otra banda, más la mitad de una banda, más cuarto de banda y también a ti, ganso, cuántos gansos en total serían?

- ¡Cien gansos!

- ¿Y sin ti cuántos? -- Noventa y nueve.

- ¡Bien! Quitemos en nuestro dibujo la rayita que te representa a ti, ganso, y marquemos que quedan 99 gansos.

La cigüeña con el pico hizo en la arena lo que vemos en la fig. 24.

Figura 24

- Ahora reflexiona un poco- continuó la cigüeña, un cuarto de banda más una mitad de banda, ¿cuántos cuartos de banda son?

El ganso se quedó pensativo, miró las líneas dibujadas en la arena y dijo:

- ¡La línea que representa la mitad de una banda es dos veces más larga que la línea que indica un cuarto de banda, es decir, en una mitad van incluidos dos cuartos. Entonces, una mitad más un cuarto de banda, es lo mismo que tres cuartos de banda.

- ¡Bravo!- elogió la cigüeña al ganso. – Y una banda completa, ¿cuántos cuartos contiene? - - ¡Claro que cuatro!- respondió el ganso.

- ¡Cierto! Pero en nuestro caso tenemos una banda, más otra banda, más la mitad de banda, más un cuarto de banda y todo ello supone 99 gansos. Entonces, si pasamos todo a cuartos, ¿cuántos cuartos en total resultan?

El ganso lo pensó y dijo:

- Una banda es lo mismo que 4 cuartos de banda, más otra banda, otros 4 cuartos, en total 8 cuartos; luego una mitad de banda es igual a 2 cuartos, sumando tenemos 10 cuartos de banda y, por último, un cuarto más de banda, en total 11 cuartos de banda lo que supone 99 gansos.

- ¡Bien!- dijo la cigüeña -Ahora dime: ¿qué has obtenido al fin y al cabo?

- He obtenido- respondió el ganso -que en once cuartos de la banda con que me encontré están incluidos 99 gansos.

- Y por consiguiente, ¿cuántos hay en un cuarto de banda? El ganso dividió 99 por 11 y respondió: - En un cuarto de banda hay 9 gansos.

- ¿Y en una banda completa, cuántos?

- Una banda completa consta de cuatro cuartos... Yo me encontré con 36 gansos- exclamó con alegría el ganso.

- ¡Eso es! - pronunció con orgullo la cigüeña - ¡Tú solo, por lo visto, no llegarías a acertarlo!... ¡Ay de ti... ganso!

60. Un campesino y el diablo

Iba un campesino por un camino llorando: "¡Caramba! ¡Qué vida tan amarga! ¡Me veo acuciado por la necesidad! En mi bolsillo tengo tan sólo unas monedas de cobre y ahora debo entregarlas. ¿Y cómo se las arreglan otros que por el dinero que tienen reciben más dinero? Si alguien, por lo menos quisiera ayudarme". Apenas acabó de pronunciar estas palabras, mira y ve que delante de él está el diablo.

- Bueno- le dice -si quieres, yo puedo ayudarte. Y esto no será difícil. ¿Ves ese puente que atraviesa el río?

- ¡Sí, lo veo!- responde el campesino con temor.

- Pues basta con que pases por él para que dupliques el dinero que tienes ahora. Si pasas de regreso, otra vez se duplicará tu dinero, en una dirección u otra, tendrás exactamente dos veces más dinero que el que tenías antes de pasarlo.

- ¿De veras?- pregunta el campesino.

- ¡Doy palabra- le asegura el diablo - pero, con una condición! Por yo duplicarte el dinero, tú cada vez que pases el puente me darás 24 kopeks. De lo contrario, no estoy de acuerdo.

- ¡Bueno, no hay mal en ello!- responde el campesino.- Ya que el dinero continuamente va a duplicarse ¿por qué no darte cada vez 24 kopeks? ¡A ver, probemos!

Pasó el campesino el puente una vez, contó el dinero.

En efecto, tenía dos veces más. Tiró 24 kopeks el diablo y pasó el puente otra vez. De nuevo tenía dos veces más dinero que antes. Contó 24 kopeks, se los dio al diablo y pasó puente por tercera vez. El dinero otra vez re duplicó. Pero resultó que esta vez eran exactamente 24 kopeks los que, según el acuerdo... tenía que dar al diablo. Se los dio y se quedó sin un kopek.

¿Cuánto dinero tenía e! campesino a un principio?

61. Los campesinos y las patatas

Tres campesinos entraron en una posada a descansar y comer. Encargaron a la dueña que les cociese patatas y se durmieron. La dueña coció las patatas, pero no despertó a los campesinos, sino que puso la olla con la comida sobre la mesa y se fue. Se despertó uno de los campesinos, vio las patatas y, para no despertar a sus compañeros, las contó, comió su parte y se durmió de nuevo. Al poco rato se despertó otro; no sabiendo que uno de sus compañeros ya se había comido su parte, contó las patatas que quedaban, comió la tercera parte y otra vez se echó a dormir. Después se despertó el tercero; creyendo que era el primero en despertarse contó las patatas que quedaban en la olla y se comió la tercera parte. En este momento se despertaron sus compañeros y vieron que en la olla quedaban 8 patatas. Entonces, todo quedó claro.

Hallar cuántas patatas sirvió a la mesa la dueña, cuántas se comió y cuántas más deberían comer cada campesino, para que a todos les tocasen partes iguales.

62. Dos pastores

Se encontraron dos pastores, Iván y Piotr. Iván le dice a Piotr. "¡Dame una oveja, entonces tendré dos veces más ovejas que tú!". Pero Piotr le contesta: "¡No! Mejor que me des tú una oveja, entonces tendremos los dos la misma cantidad de ovejas" ¿Cuántas ovejas tenía cada pastor?

63. Las campesinas perplejas

Dos campesinas vendían en el mercado manzanas. Una vendía 2 manzanas por un kopek la otra, 3 por 2 kopeks.

Cada una tenía en su cesta 30 manzanas, así que la primera calculaba recibir 15 kopeks, la segunda, 20 kopeks. Las dos juntas deberían recibir 35 kopeks.

Calculando de tal forma y para evitar riñas y no quitarse compradores entre sí, las campesinas decidieron unir sus manzanas y venderlas conjuntamente, razonando, al mismo tiempo de la forma siguiente: "Si yo vendo un par de manzanas por un kopek y tú tres por 2 kopeks, entonces, para recibir cada una el dinero que nos corresponde, tenemos que vender cinco manzanas por 3 kopeks."

Lo dicho, hecho. Juntaron las vendedoras sus manzanas (resultaron en total 60) y comenzaron a vender 5 manzanas por 3 kopeks.

Las vendieron y quedaron perplejas: resultó que por sus manzanas habían recibido 36 kopeks, es decir, uno más que lo que pensaban recibir.

Las campesinas se pusieron a pensar: ¿de dónde salió el kopek sobrante y a quién de ellas pertenece? ¿Y cómo dividir ahora el dinero obtenido?

¿Efectivamente, cómo sucedió?

Mientras estas dos campesinas razonaban sobre su inesperada ganancia, otras dos, después de escuchar lo ocurrido, también decidieron ganar un kopek más.

Cada una de ellas tenía también 30 manzanas, pero la primera vendía dos manzanas por un kopek y la segunda, 3 por un kopek. La primera debería obtener de la venta 15 kopeks y la segunda, 10; las dos juntas deberían obtener 25 kopeks. Decidieron, entonces, vender sus manzanas también en conjunto, razonando exactamente lo mismo que las primeras vendedoras: "si yo vendo 2 manzanas y tú

3 por un kopek, entonces, para recibir cada una el dinero que nos corresponde debemos vender 5 manzanas por 2 kopeks."

Juntaron las manzanas, vendieron 5 por 2 kopeks e inesperadamente resultó que habían obtenido sólo 24 kopeks, o sea, uno menos que lo calculado.

También se quedaron pensativas estas campesinas: ¿cómo es posible y quién de las dos tendrá que quedarse sin un kopek?

64. Un hallazgo

Cuatro campesinos: Sidor, Carp, Pajóm y Fomá, regresaban de la ciudad lamentándose de que no habían ganado nada.

-¡Eh!- dijo Sidor - si encontrase una bolsa de dinero cogería solamente la tercera parte, lo demás, junto con la bolsa, os lo daría a vosotros.

- Yo - exclamó Carp - lo dividiría entro todos nosotros por igual.

- Yo me quedaría satisfecho con tan sólo la quinta parte - dijo Pajóm.

- A mí me bastaría con la sexta parle - añadió Fomá.

- Pero, para qué hablar... ¡Como si fuese cosa habitual encontrar dinero en un camino! ¿Quién lo va tirar para nosotros?

De pronto... ni más ni menos, ven en el camino una bolsa, la levantaron y decidieron repartir el dinero hallado conforme el deseo expresado por cada uno, es decir, a Sidor, la tercera parte, a Carp, la cuarta, a Pajóm, la quinta y a Fomá, la sexta parte.

Abrieron la bolsa y hallaron en ella 8 billetes, uno de tres rublos y los demás de un rublo, cinco rublos y diez rublos. Más ninguno de los campesinos podía apoderarse de su parte sin hacer cambio. Entonces decidieron esperar para ver si podían hacer cambio con algún pasajero. De pronto ven aproximarse a un jinete; los campesinos le detienen.

Pues nos pasa lo siguiente – le dicen - hemos encontrado una bolsa con dinero y queremos dividirlo entre nosotros de tal y tal forma. ¡Por eso, sé bondadoso y cámbianos un rublo!

- Un rublo yo no os puedo cambiar, pero dadme la bolsa con el dinero; yo meteré en ella mi rublo y de todo el dinero daré a cada uno su parte; yo me quedaré con la bolsa.

Los campesinos se conformaron con alegría. El jinete juntó todo el dinero, dio al primer campesino 1/3, al segundo 1/4, al tercero 1/5 y al cuarto 1/6 partes de todo el dinero y é! se quedó con la bolsa.

- Bueno, gracias, amigos - exclamó el jinete - vosotros os vais contentos y yo también. Con estas palabras echó su caballo a galope. Los campesinos quedaron pensativos. - ¿Por qué nos agradeció?

- ¿Cuántos billetes en total tenemos? -preguntó Carp. Los contaron, resultaron 8

- Pero, ¿dónde está e! billete de 3 rublos? ¿Quién lo tiene?

- ¡Nadie lo tiene!

- ¿Cómo es posible, compañeros? ¿Resulta que el jinete nos estafó? Vamos a contar en cuánto a quién engañó...

Calcularon.

- ¡No, amigos, yo recibí más de lo que me correspondía! - dije Sidor.

- Y yo también recibí 25 kopeks más - dijo Carp.

- ¿Cómo es posible? ¡A todos dio más que lo que nos correspondía y se llevó el billete de tres rublos! ¡Pues vaya, de qué manera tan hábil nos engañó! - decidieron los campesinos.

¿Cuánto dinero encontraron los campesinos? ¿Les engañó el jinete? ¿Qué billetes dio a cada uno de ellos?

65. El reparto de camellos

Un anciano, que tenia tres hijos, les ordenó que después de su muerte repartieran un rebaño de camellos de su pertenencia, de tal forma que al hijo mayor le tocase la mitad de todos los camellos, al mediano, una tercera parte y al menor, una novena.

Falleció el anciano y les dejó 17 camellos. Los hijos comenzaron el reparto, pero resultó que el número 17 no se dividía por 2, ni por 3 ni por 9. Desconcertados sin saber qué hacer, los hermanos se dirigieron a un sabio. Este vino donde ellos en su propio camello e hizo el reparto conforme al testamento del anciano. ¿Cómo lo logro?

66. ¿Cuánta agua hay en la barrica?

Dícese en un cuento que cierto dueño contratando a un sirviente le propuso el siguiente examen:

- Ahí tienes una barrica, llénala de agua exactamente hasta la mitad, ni más ni menos. Pero, ten en cuenta, no debes utilizar ni palo, ni cuerda ni cualquier otro objeto para medir. El sirviente cumplió of encargo. ¿Cómo lo hizo?

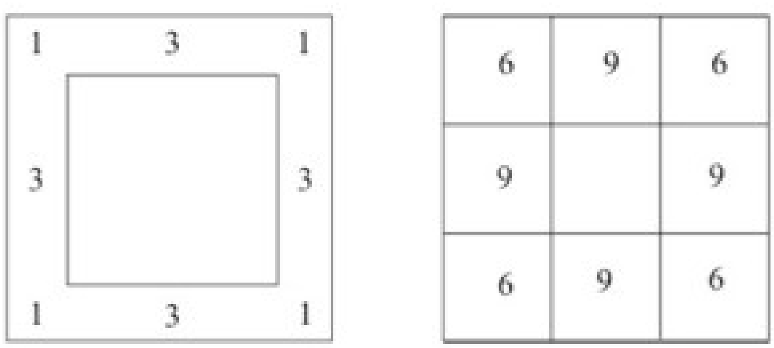
67. Disposición de centinelas

A lo largo de las paredes de un bastión cuadrado era preciso poner 16 centinelas. El comandante los distribuyó según la fig. 25, con 5 personas en cada lado. Después vino el coronel y, no satisfecho de la posición de los centinelas, dio la orden de distribuir a soldados de tal forma que en cada lado estuviesen 6. Después del coronel llegó el general, se enfadó con el coronel por su orden y distribuyó los soldados de modo que quedaron 7 personas por cada lado.

¿Cuáles fueron las distribuciones en los dos últimos casos?

68. El dueño burlado

Cierto dueño construyó en el sótano de su casa un armario era forma de cuadrado dividido en secciones. Dejó la sección central libre para colocar en ella botellas vacías y en las restantes colocó 60 botellas de aceite: 6 botellas en cada sección angular y 9 botellas en cada sección lateral. De tal forma, en cada lado del cuadrado colocó 21 botellas (fig. 26).



Figuras 25 y 26
Distribución inicial de las botellas

Uno de sus criados observó que su amo comprobaba la cantidad do botellas, contándolas solamente por los lados del cuadrado y cerciorándose (lo que había en cada uno de ellos 21 botellas. Entonces el criado se llevó 4 botellas y distribuyó las restantes de tal forma que nuevamente resultasen 21 botellas en cada lado. Al día siguiente, el dueño contó las botellas de la misma forma y pensó que la cantidad de éstas era la misma y que el criado únicamente había cambiado su distribución. El criado aprovechó el error de su amo y se llevó otras cuatro botellas, colocando las restantes de tal forma que en cada lado del cuadrado otra vea hubiese 21 botellas. Y así continuó obrando hasta que fue posible. La pregunta es ¿cuántas veces el criado se llevó botellas y cuántas botellas se llevó en total?

69. El cuento sobre el príncipe Iván y Kaschéi el Inmortal, que sabía contar solamente hasta diez

De este cuento citaremos sólo algunos fragmentos. El cuento es muy entretenido, pero a nosotros nos interesan los problemas matemáticos que surgen en él.

"Vivía en cierto reino el príncipe Iván. Tenía tres hermanas: las princesas María, Olga y Ana. Sus padres habían fallecido.

Casó el príncipe Iván a sus hermanas con los zares de los reinos de cobre, plata y oro y se quedo solo. Un año entero vivió el príncipe Iván sin sus hermanas y comenzó a echarlas de menos. Decidió, entonces, ir en busca de ellas para visitarlas".

Más adelante el cuento relata de cómo el príncipe Iván se encontró con Elena la Hermosa, de cómo se enamoraron, de cómo la raptó Kaschéi el Inmortal decidiendo hacerla su mujer. Se negó Elena la Hermosa a ser mujer de Kaschéi e indignado éste la convirtió en un abedul blanco y fino.

"Reunió el príncipe Iván a sus guerreros y se fue en busca de Elena la Hermosa. Mucho camino anduvo hasta que dio con una casucha donde vivía la bruja Yagá. Le contó el príncipe Iván a dónde y a qué se dirigía. La bruja Yagá hacía ya mucho tiempo que contendía con Kaschéi y decidió ayudar al príncipe Iván:

Para liberar a Elena de los encantos do Kaschéi deberás reunir a las puertas de su palacio a los zares de los reinos de cobre, de plata y de oro. Justamente a la media noche deberán ellos y tú también pronunciar juntos una palabra mágica. Entonces los encantos perderán su fuerza y Kaschéi se verá imposibilitado de actuar.

Un cuervo negro escuchó esta conversación de la bruja con el príncipe Iván y se lo comunicó todo a Kaschéi.

Al despedirse del príncipe Iván, la bruja Yagá le dio un anillo mágico

- Este anillo te conducirá donde vive Kaschéi. Y si para algo te hace falta abrir o cerrar algún cerrojo pídeselo al anillo que lo haga. Lo cumplirá en un instante.

Kaschéi el Inmortal acechó al príncipe Iván, le capturó y tiró, junto con sus guerreros, a un subterráneo profundo y oscuro.

-Jamás verás, Iván, a Elena la Hermosa.

Más adelante el cuento describe el subterráneo. Era una cueva cuadrada, que tenía 8 celdas situadas a lo largo de las paredes (las hemos representado condicionalmente en la fig. 27 en forma de cuadrados pequeños). Las celdas se comunicaban entre sí y todo el subterráneo, que tenía una sola salida, se cerraba fuertemente con siete candados. En total eran 24 guerreros junto con el príncipe Iván y Kaschéi los distribuyó en las ocho celdas por iguales.

Cada tarde venía Kaschéi al subterráneo a burlarse del príncipe y cada vez contaba sus prisioneros. Sabía contar solamente hasta diez, por eso contaba la cantidad de cautivos que había en tres celdas a lo largo de cada pared del subterráneo y como eran 9 se quedaba tranquilo.

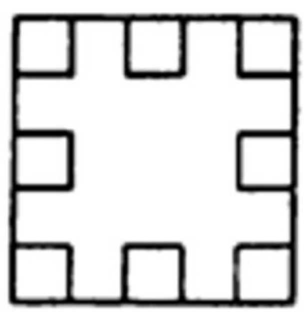


Figura 27

Las dificultades no abatieron al príncipe Iván. Con ayuda del anillo mágico abrió los siete candados y envió a tres de sus guerreros con mensajes donde los zares de los reinos de cobre, plata y oro. Y para que Kaschéi no sospechara nada, el príncipe

Iván distribuyó a los guerreros restantes por las celdas de tal forma, que a lo largo de cada pared del subterráneo hubiese 9 personas. Como siempre vino por la tarde Kaschéi, refunfuñó que los guerreros no estaban sentados en sus sitios. Los contó a lo largo da cada pared y no sospechó nada.

Al cabo de un tiempo llegaron los mensajeros donde los zares de los reinos de cobre, plata y oro, les relataron todo lo que había pasado y junto con ellos regresaron al subterráneo del palacio de Kaschéi, precisamente en el momento en que decidió Kaschéi revisar el subterráneo. El príncipe Iván distribuyó a todos sus guerreros y a los tres zares llegados de tal forma que de nuevo en las celdas, a lo largo ele cada pared, estuviesen sentadas 9 personas. Y otra vez consiguió engañar a Kaschéi.

Después el cuento narra cómo, justamente a la medianoche, los tres zares, junto con el príncipe Iván, se acercaron a las puertas del palacio de Kaschéi y pronunciaron la palabra mágica, cómo salió Elena la Hermosa del encanto, cómo consiguieron huir todos del reino de Kaschéi y, por fin, cómo se casaron el príncipe Iván y Elena la Hermosa.

El cuento así termina, pero ¿Cómo distribuyó a los cautivos el príncipe Iván?

70. A recoger setas

Un abuelo fue a recoger setas al bosque con sus cuatro nietos. En el bosque se dispersaron y comenzaron a buscar setas. Al cabo de media hora el abuelo se sentó debajo de un árbol a descansar y recontar las setas: resultaron 45. En ese momento regresaron donde él los nietos, todos con sus cestas vacías; ni uno de ellos había encontrado setas.

- ¡Abuelo! - le pide uno de los nietos - dame tus setas, para que mi cestita no esté vacía. Tal vez me des la suerte y recoja muchas setas.

- ¡Y a mi, abuelo!

- ¡Y también a mí dame!

El abuelo repartió todas sus setas entre los nietos. Después nuevamente se dispersaron todos y sucedió lo siguiente. Uno de los niños encontró dos setas más, otro perdió 2, el tercero encontró tantas setas más, cuantas le había dado el abuelo

y el cuarto perdió la mitad de las setas recibidas del abuelo. Cuando regresaron a casa y contaron sus setas resultó que todos tenían la misma cantidad.
¿Cuántas setas recibió del abuelo cada niño y cuántas tenía cada uno de ellos cuando regresaron a casa?

71. ¿Cuántos había?

Una mujer llevaba a vender una cesta de huevos. Un transeúnte, con el que se cruzó, por descuido, le empujó de tal forma que la cesta cayó al suelo y todos los huevos se cascaron. El transeúnte quiso pagar a la mujer el precio de los huevos cascados y le preguntó cuántos eran. "Yo no recuerdo - dijo la mujer - solamente sé bien que cuando los colocaba en la cesta de dos en dos, me quedó uno de más. Exactamente lo mismo, me quedaba siempre un huevo cuando los colocaba de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco y de seis en seis. Pero cuando los colocaba de siete en siete no me quedaba ni un sólo huevo". ¿Cuántos huevos llevaba?

72. El reloj bien puesto en hora

Dos amigos Piotr e Iván, viven en una misma ciudad no lejos uno del otro. Cada uno tiene en su casa solamente un reloj de pared. Un día Piotr se olvidó de dar cuerda a su reloj y éste se paró. "Pues me voy de visita donde Iván y al mismo tiempo miro qué hora decidió Piotr. Después de estar cierto tiempo de visita en casa de Iván, Piotr regresó a su casa y puso su reloj de pared exactamente en hora. ¿Podríais vosotros hacer lo mismo?

73. Restauración de unos apuntes

En un libro de cuentas figuraba el apunte que reproducimos en el dibujo 28. Éste resultó manchado con tinta en varias partes de tal modo que no era posible comprender ni la cantidad de trozos vendidos, ni las primeras tres cifras de la suma obtenida.

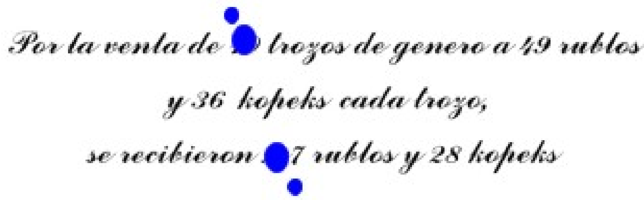


Figura 28

La pregunta es: ¿se puede, por los datos conservados, determinar la cantidad de trozos vendidos y el total de la suma obtenida?

74. Los bribones

En una fonda había cuatro mesas, una a lo largo de cada pared. De unas maniobras regresaban hambrientos 21 soldados y se detuvieron a comer en ella, e invitaron también al dueño a comer. Se sentaron todos de la siguiente manera: a tres mesas, los soldados, de a 7 por cada una de ellas; a la cuarta se sentó el dueño (en la fig. 29 los soldados y el dueño están representados por rayitas).

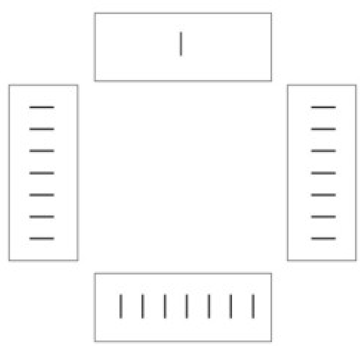


Figura 29

Los soldados acordaron con el dueño que pagaría la cuenta aquél que quedase último, observando la siguiente condición: contando por orden (en el sentido de las agujas del reloj) a todos, incluido el dueño, se libera de pagar cada séptimo. El liberado inmediatamente se va de la fonda y a continuación en la cuenta no participa. Resultó que el dueño quedó el último. ¿Por quién comenzaron a contar?

¿Por quién se debería comenzar a contar, si fuesen solamente 4 a cada una de las tres mesas?

75. Apuesta de un cochero con un pasajero

En una posada un pasajero impaciente al ver al cochero le pregunta:

- ¿No es hora ya de aparejar?

- ¡Pues no! - responde el cochero - aún queda media hora hasta la salida. Eso es lo suficiente para veinte veces aparejar, desaparejar y otra vez aparejar. No es la primera vez que lo hacemos.

¿Cuántos caballos se aparejan a un carruaje?

-Cinco.

-¿Y cuánto tiempo se necesita para aparejarlos?

- Pues... unos dos minutos, no más.

- ¿Es posible? - duda el pasajero. - Aparejar cinco caballos en dos minutos... Me parece demasiado rápido...

- Eso es muy fácil - responde of cochero. –

Sacan los animales con los arreos ya puestos, con los tirantes y boleas, con las riendas. Queda solamente enganchar los anillos de las boleas a los ganchos, alinear los dos caballos del centro a la lanza, coger las riendas, sentarse en el pescante y asunto concluido... ¡Puedes arrear! Es cosa sabida...

- ¡Bueno! -dice el pasajero. - Supongamos que de tal forma se pueden aparejar y desaparejar las caballerías veinte veces en media hora si se quiere. Pero, si es preciso cambiar todos los caballos de lugar, entonces hacerlo sí que será imposible no solamente en media, sino en dos horas.

-¡También es cosa fácil! - responde con orgullo el cochero. ¡Cómo si no fuese necesario a veces hacerlo! En cualquiera combinación puedo cambiar los caballos de lugar en una hora e incluso en menos. ¡Un caballo se cambia con otro y basta! ¡Es cuestión de un minuto!

- No, tú cambia los caballos no de las formas para ti más convenientes -observa el pasajero- sino de todas las formas posibles de combinar cinco caballos, contando para cada uno de los cambios un minuto, como tú acabas de decir alabándote.

Estas palabras hirieron el orgullo del cochero.

- Claro que puedo aparejar todos los caballos de todas las formas posibles en no más de una hora.

- ¡Yo daría cien rublos, solamente por ver cómo lo haces en una hora! - Exclama el pasajero.

- Pues yo, aunque soy pobre, pagaré por su viaje en la diligencia, si no hago lo que digo -responde el cochero.

Así acordaron. ¿Cuál fue el resultado de la apuesta?

76. ¿Quién con quién está casado?

Tres campesinos, Iván, Piotr y Alexei, llegaron al mercado con sus mujeres: María, Ekaterina y Anna. Quién con quién está casado no lo sabemos. Es preciso averiguarlo a base de los siguientes datos: cada una de estas seis personas pagó por cada objeto comprado tantos kopeks cuántos objetos compró. Cada hombre gastó 48 kopeks más que su mujer. Además, Iván compró 9 objetos más que Ekaterina y Piotr 7 objetos más que María.

Capítulo 7
Ejercicios con un trozo de papel

No es probable que entre nuestros lectores encuentre alguno que no sepa hacer con un trozo cuadrado de papel un gallito, una barquita, una cajita y otros objetos. Esto se consigue doblando y plegando de distintas formas el cuadrado de papel. Los pliegues así obtenidos permiten dar a cualquier trozo de papel una u otra configuración deseada. Más adelante nos convenceremos que plegando papeles se puede no sólo hacer juguetes graciosos o interesantes, sino también una noción palpable sobre muchas figuras en el plano, así como sobre sus propiedades. Un trozo de papel blanco ordinario (aún mejor de color) y un cortaplumas, para alisar o quitar las partes sobrantes pueden resultar un magnifico material para la asimilación de los principios de la geometría.

Doblando un trozo de papel, hacemos coincidir puntos cualesquiera, después, oprimiendo uno contra otro con el dedo, alisamos el pliegue con el cortaplumas. Algo que cada uno de ustedes seguramente más de una vez lo habrá hecho. Pero, ¿se han detenido alguna vez a pensar por qué la línea del pliegue forzosamente resulta recta? Si se reflexiona, es fácil ver

En esto la manifestación de uno de los teoremas de la geometría, concretamente, el teorema que el conjunto de puntos en un plano equidistantes de dos punto fijos es una línea recta.

Será muy útil buscar argumentaciones geométricas para los ejercicios que siguen.

77. Un rectángulo

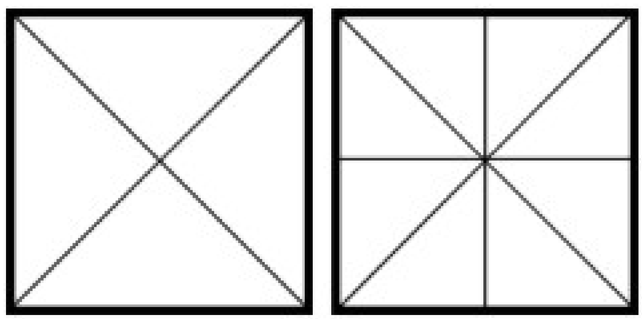
Tenemos un trozo de papel de forma irregular. ¿Cómo recortar de él un rectángulo utilizando solamente un cortaplumas?

78. Un cuadrado

¿Cómo de un rectángulo de papel obtener un cuadrado?

Analicemos a continuación algunas propiedades del cuadrado obtenido. La línea del pliegue, que pasa por dos vértices opuestos del cuadrado, es su diagonal. La otra diagonal resulta doblando el cuadrado por el otro par de vértices opuestos, conforme se ve en la fig. 30. Si hacemos una superposición directa veremos que las diagonales del cuadrado se cortan en ángulo recto y que en el punto de intersección, estas diagonales se dividen por la mitad. El punto de intersección de las diagonales es el centro del cuadrado.

Si doblamos el cuadrado por las diagonales cada diagonal dividirá el cuadrado en dos triángulos coincidentes, cuyos vértices se sitúan en los ángulos opuestos del cuadrado. Cada uno de estos triángulos tiene, naturalmente, dos lados iguales, es decir, son isósceles.



Figuras 30 y 31

Además, estos triángulos son rectángulos, ya que cada uno de ellos tiene un ángulo recto.

Es fácil observar que dos diagonales dividen el cuadrado en 4 triángulos isósceles rectángulos, coincidentes si se superponen, cuyo vértice común se encuentra en el centro del cuadrado.

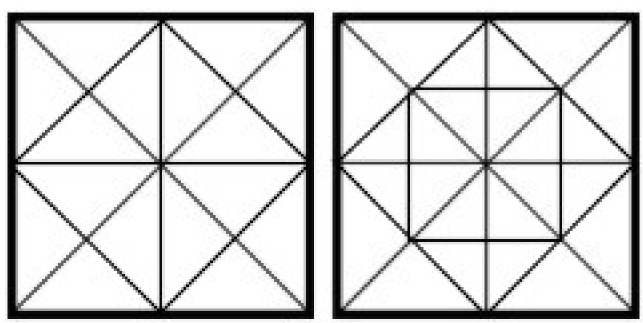
Doblemos ahora nuestro cuadrado de papel en dos partes iguales, de tal forma que su lado coincida con el otro opuesto a él. Obtendremos un pliegue que pasa por el centro del cuadrado (fig. 31). La línea de este pliegue, como es fácil comprobar, tiene las siguientes propiedades:

1. es perpendicular a los otros dos lados del cuadrado;
2. divide estos lados por la mitad;
3. es paralela a los dos primeros lados del cuadrado;
4. ella misma se divide por mitades en el centro del cuadrado;
5. divide el cuadrado en dos rectángulos, coincidentes durante la superposición;

6. cada uno de estos rectángulos es equidimensional (es decir, de igual superficie) a uno de los triángulos, en que se divide el cuadrado por la diagonal.

Doblemos el cuadrado otra vez de tal forma que coincidan los otros dos lados. El pliegue ahora logrado y el obtenido antes, dividen el cuadrado inicial en 4 cuadrados coincidentes (fig. 31).

Doblemos estos 4 cuadrados menores por sus ángulos, situados en el centro de los lados del cuadrado mayor (por las diagonales), obtendremos un cuadrado (fig. 32), inscrito en nuestro cuadrado inicial. El cuadrado inscrito, como será fácil comprobar, tiene una superficie igual a la mitad de la superficie del cuadrado mayor y el mismo centro. Uniendo los centros de los lados del cuadrado interior (inscrito) obtenemos otro cuadrado con una superficie igual a 1/4 de la superficie del cuadrado inicial (fig. 33). Si en este último cuadrado inscribimos otro, de la misma forma, su superficie será igual a 1/8 de la superficie del inicial. En éste, a su vez, podernos inscribir otro, cuya superficie será igual a 1/16 de la superficie del inicial y así sucesivamente.



Figuras 32 y 33

Si doblamos el cuadrado de cualquier forma, pero procurando que el pliegue pase por su centro, obtendremos dos trapecios coincidentes si se superponen.

79. Un triángulo isósceles

Obtener un triángulo isósceles plegando un cuadrado de papel.

80. Un triángulo equilátero

¿Cómo obtener un triángulo equilátero plegando un cuadrado de papel?

Examinemos algunas propiedades del triángulo equilátero obtenido. Doblémoslo plegando cada uno de sus lados a la base. De tal forma obtendremos sus tres alturas. AA', BB', CC' (fig. 34).

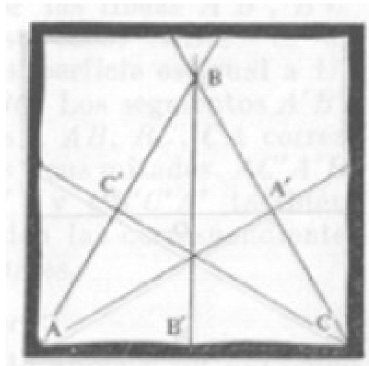


Figura 34

He aquí algunas propiedades del triángulo equilátero, que pueden ser deducidas examinando la figura 34, obtenida por nosotros.

Cada una de las alturas divide el triangulo en dos triángulos rectángulos, coincidentes si se superponen.

Estas alturas dividen los lados del triángulo por mitades y son perpendiculares a ellos; se intersecan en un punto.

Supongamos que las alturas AA' y CC' se encuentran en O. Trazamos BO y la prolongamos hasta el encuentro con AC en B'. Ahora demostremos que BB' es la tercera altura. De los triángulos C'OB y BOA' hallamos que |OC'| = |OA'| y nos cerciorarnos de que los ángulos OBC' y A'BO son iguales. Después, de los triángulos AB'B y CB'B se deduce que los ángulos AB'B y BB'C son iguales, es decir, cada uno de ellos es un ángulo recto. Entonces, BB' es la altura del triángulo equilátero ABC. Esta altura también divide AC en dos mitades en B'.

De una forma análoga a la anterior se puede demostrar que 0A, OB y OC son iguales y que también lo son OA', OB' y OC'.

Por lo tanto, desde O, tomado por centro, se pueden trazar circunferencias, las cuales pasan, correspondientemente, por A, B y C y por A', B' y C'. La última circunferencia es tangente a los lados del triángulo.

El triángulo equilátero ABC se divide en seis triángulos rectángulos coincidentes, cuyos ángulos en el punto O son iguales y en tres cuadriláteros coincidentes y simétricos tales, que cerca de ellos se puede trazar una circunferencia.

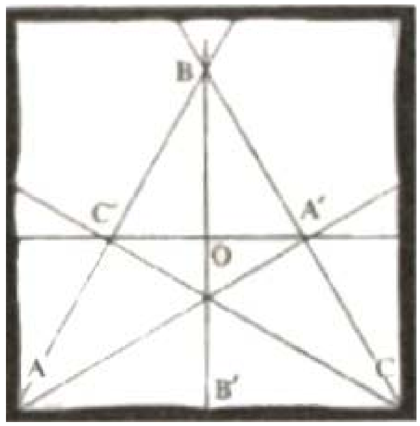


Figura 35

La superficie del triángulo AOC es igual a la superficie duplicada del triángulo A’OC’; por consiguiente, |AO| = 2|OA’|. De forma análoga, |BO| = 2|OB'| y |CO| = 2|OC’|. Resulta que el radio de la circunferencia trazada cerca del triángulo ABC, es dos veces mayor que el radio de la circunferencia inscrita.

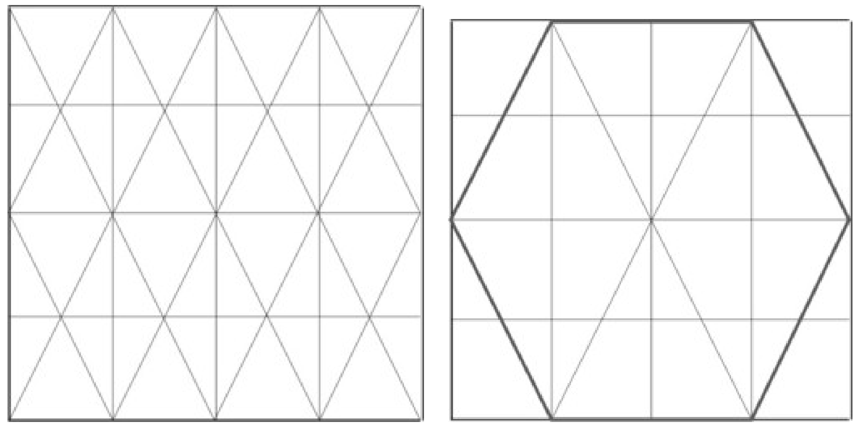
El ángulo recto A del cuadrado es dividido por las rectas AO y AC en tres partes iguales. El ángulo BAC es igual a 2/3 del ángulo recto. Cada uno de los ángulos C'AO y OAB' son iguales a 1/3 del ángulo recto. Lo mismo se refiere a los ángulos en B y C.

Cada uno de loe seis ángulos en O son iguales a 2/3 del resto.

Plieguen el papel por las líneas A’B’, B’C’ y C’A’ (fig. 35). En este caso, A’B’C’ es un triángulo equilátero. Su superficie es igual a 1/4 del área del triángulo ABC. Los segmentos A’B’, B’C’, C’A’ son paralelos a AB, BC, CA correspondientemente e iguales a sus mitades. AC’A’B’ es un rombo; C’BA’B’ y CB’C’A’ también; A’B’, B’C’, C’A’, dividen las correspondientes alturas en dos partes iguales.

81. Un hexágono regular

¿Cómo de un cuadrado obtener un hexágono regular?



Figuras 36 y 37

En la figura 36 se ha representado un modelo de ornamento de triángulos equiláteros y hexágonos regulares que puede ser construido por ustedes mismos sin dificultad.

A su vez, uno de los hexágonos puede ser dividido en hexágonos regulares iguales y en triángulos equiláteros (fig. 37), realizando los dobleces correspondientes por los puntos que dividen sus lados en tres partes iguales. De tal forma, se obtiene un ornamento simétrico y bonito.

Se puede obtener un hexágono también de la siguiente forma. Tomamos un triángulo equilátero y lo doblamos procurando que todos sus vértices se unan en el centro. Utilizando los conocimientos ya adquiridos por nosotros sobre el triángulo equilátero, no es difícil deducir que el lado del hexágono obtenido es igual a 1/3 del lado de cualquier triángulo equilátero tomado. La superficie de este hexágono es igual a 2/3 de la superficie del triángulo tomado.

82. Un octágono regular

¿Cómo en un cuadrado dado construir un octágono regular?

83. Una demostración original

Todo aquel que estudia geometría sabe que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. Pero pocos son los que saben que este teorema fundamental puede ser "demostrado" con un simple trozo de papel. Ponemos entre comillas la palabra "demostrado" puerto que esto no es una demostración en el sentido riguroso de la palabra, sino más bien, una demostración visual. Pero de todas formas, este ingenioso procedimiento es muy curioso y aleccionador.

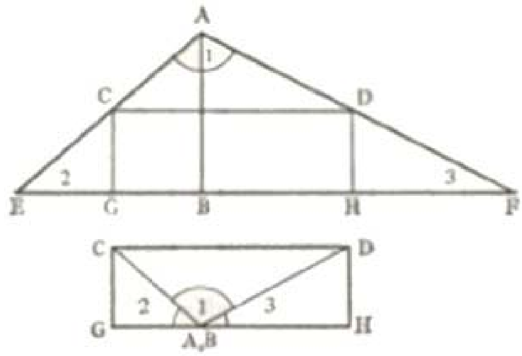


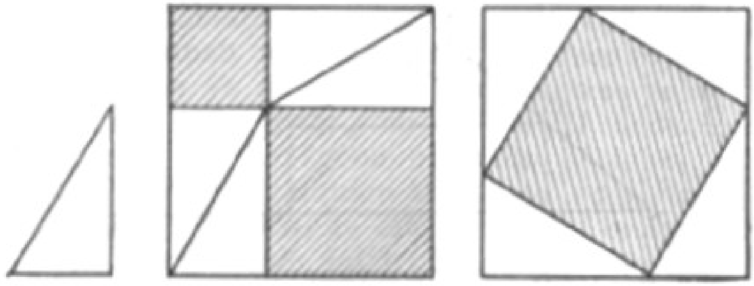
Figura 38

De un trozo de papel se recorta un triángulo cualquiera y se dobla primeramente por la línea AB (fig. 38), de tal forma que la base del triángulo se sitúe sobre si misma. Después, se desdobla y se dobla nuevamente por la línea CD, de tal forma que el vértice A coincida con el punto B. Doblando a continuación el triángulo por las líneas DH y CG, de tal forma que los puntos E y F coincidan con el punto B, obtenemos el rectángulo CDHG y visualmente nos convencemos que los tres ángulos del triángulo (1, 2, 3) suponen en suma dos rectos.

La evidencia insólita y la simplicidad de este procedimiento permiten dar a conocer, incluso a niños que no estudian geometría, uno de los más importantes teoremas. En lo que se refiere a los que saben geometría, este procedimiento presenta un problema interesante de cómo explicar por qué una dobladura así de un triángulo de papel siempre da el resultado deseado. Explicar esto no es difícil y nosotros no quisiéramos privar al lector del placer de buscar él mismo, la argumentación para esta "demostración" tan original.

84. El teorema de Pitágoras

Demostremos que la superficie de un cuadrado, construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las superficies de los cuadrados construidos sobre los catetos.



Figuras 39, 40 y 41

Dibujemos dos cuadrados iguales, cuyos lados son iguales a la suma de los dos catetos del triángulo dado en la fig. 39. A continuación, en los cuadrados obtenidos, realizamos las construcciones dadas en las fig. 40 y 41. Aquí, de cada uno de los cuadrados iguales quitamos 4 triángulos iguales. Si de magnitudes iguales se quita por iguales, entonces los residuos también resultarán iguales. Estos residuos en las fig. 40, 41, están rayados: pero en la fig. 40 resultan dos cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo dado, mientras que en la fig. 41, un cuadrado, construido sobre la hipotenusa. La suma de las superficies de los dos primeros cuadrados es, por consiguiente, igual a la superficie del segundo.

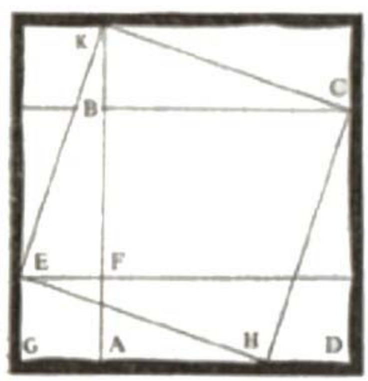


Figura 42

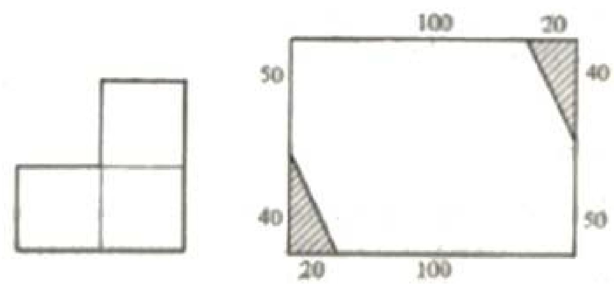
Hemos demostrado, de tal forma, el famoso teorema de Pitágoras.

Hallaremos otra demostración del mismo teorema si en un cuadrado de papel hacemos pliegues conforme se muestra en la fig. 42. Aquí GEH es un triángulo y la superficie del cuadrado, construido en EH es igual a la suma de las superficies de los cuadrados, construidos en EG y GH.

Valgámonos ahora de unas tijeras para no sólo plegar sino también cortar el papel. Así nos encontraremos con muchos problemas interesantes y útiles.

85. ¿Cómo cortar?

Tenemos una figura compuesta por tres cuadrados, situados como se ve en la fig. 43.



Figuras 43 y 44

Es preciso cortar de ella una parte, pero de tal forma que si luego adjuntamos la parte cortada a la parte restante, se obtenga un cuadrado con un boquete dentro también cuadrado.

86. De un rectángulo, un cuadrado

Un trozo de papel o cartón tiene la forma de un rectángulo, cuyos lados son iguales a 4 y 9 unidades de longitud. Cortar este rectángulo en dos partes iguales, de tal forma que colocándolas en una posición determinada, formen un cuadrado.

87. Una alfombrilla

Un ama de casa poseía una alfombrilla rectangular de 120 x 90 centímetros, cuyos dos ángulos opuestos se habían desgastado y hubo que cortarlos (en la fig. 44 son los trozos triangulares rayados).

Pero esta señora, al fin y al cabo, necesitaba una alfombrilla rectangular y encargó a un maestro que cortase la alfombrilla en dos partes, de tal forma, que cosiéndolas fuese posible obtener un rectángulo, no perdiendo, claro está, ni un trozo de material. El maestro cumplió el deseo del ama de casa. ¿Cómo lo logró?

88. Dos alfombrillas

Otra ama de casa tenía dos alfombrillas de cuadros: una de 60 x 60 cm y la otra de 80 x 80 cm (fig. 45).

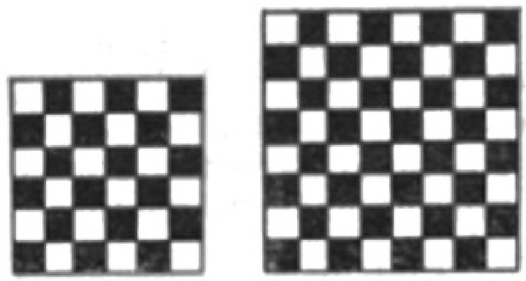


Figura 45

Un día decidió hacer de ellas una sola alfombrilla de cuadros con dimensiones de 100 x 100 cm. Un maestro se comprometió a cumplir este trabajo y prometió que cada alfombrilla sería cortada en no más de dos partes y además, sin cortar ningún cuadro. La promesa fue cumplida. ¿Cómo obró el maestro?

89. Una alfombrilla con rosas

La alfombrilla, dada en la fig. 46 tiene dibujadas 7 rosas.

Figura 46

Es necesario, mediante tres líneas rectas, cortar la alfombrilla en 7 partes de tal forma que en cada una de ellas haya una rosa.

90. Un cuadrado en 20 triángulos iguales

Cortar un trozo cuadrado de papel en 20 triángulos iguales y colocarlos de tal forma que resulten 5 cuadrados iguales

91. De un cuadrado, tres cuadrados

Una cruz está formada por cinco cuadrados, es preciso cortarla en partes con las cuales se pueda formar un cuadrado.

92. De un cuadrado, tres cuadrados

Cortar un cuadrado en siete partes de tal forma que, colocándolas en un orden determinado, se obtengan tres cuadrados iguales.

Este ejercicio se puede generalizar:

1. Corlar un cuadrado en partes, con las cuales se pueda componer una cantidad determinada de cuadrados iguales.
2. Cortar un cuadrado en la mínima cantidad de partes, con las cuales, colocadas en un orden determinado, se pueda obtener cierta cantidad de cuadrados iguales entre sí.

93. De un cuadrado, dos cuadrados

Cortar un cuadrado en 8 partes de tal forma que, siendo colocadas en un orden determinado, se obtengan dos cuadrados, siendo la superficie de uno de ellos el doble de la del otro.

94. De un cuadrado tres cuadrados

Cortar un cuadrado en 8 partes de tal forma que, colocadas en un orden determinado, formen 3 cuadrados, cuyas superficies sean proporcionales a los números 2, 3 y 4.

95. De un hexágono, un cuadrado

Cortar un hexágono regular en 5 partes de tal forma que siendo colocadas correspondientemente, formen un cuadrado.

Capítulo 8
Sofismas y paradojas geométricas

96. Una desaparición misteriosa
Dibujar en un trozo rectangular de cartón 13 palillos iguales y a la misma distancia uno del otro, tal como se muestra en la fig. 47 (el dibujo 47 lo pueden recortar y pegarlo a un cartón de papel grueso). Una vez hecho, cortar el rectángulo por la recta MN, que pasa por el extremo superior del primer palillo y por el extremo inferior del último.

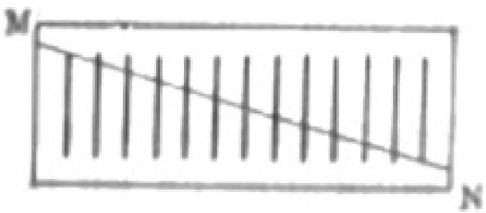


Figura 47

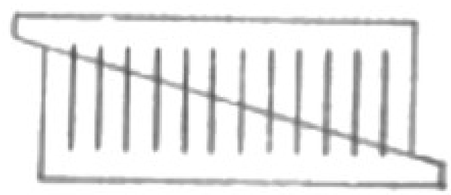


Figura 48

Si se desplazan después las dos mitades del rectángulo así como se muestra en la fig.48, se observará un fenómeno curioso: en lugar de 13 palillos en el dibujo habrá solamente 12. Un palillo desapareció sin dejar huellas.
¿Dónde está ese palillo?
Si se comparan las longitudes de los palillos en el primero y segundo dibujos, verán que los palillos del segundo son 1/12 más largos que los palillos del primero. El decimotercero palillo desapareció pero no sin dejar huellas: es como si se hubiese disuelto entre los 12 restantes, alargando, cada uno de ellos, en 1/12 parte de su longitud. La causa de este fenómeno, desde el punto de vista geométrico, es muy fácil de comprender. La recta MN y la recta que pasa por los extremos superiores de todos los palillos forman un ángulo, cuyos lados son intersecados por una de las rectas paralelas. De la semejanza de los triángulos se deduce que la recta MN corta el segundo palillo 1/12 parte de su longitud, del tercero 2/12, del cuarto 3/12 partes y así sucesivamente. En cuanto desplazamos las dos partes del cartón, añadimos el trozo cortado de cada palillo (comenzando por el segundo) a la parte inferior del palillo anterior. Y puesto que cada parte cortada es 1/12 más larga que la anterior,

cada palillo se alarga 1/12 parte. A simple vida, este alargamiento no se percibe, así que la desaparición del palillo decimotercero, en principio, parece bastante misteriosa.

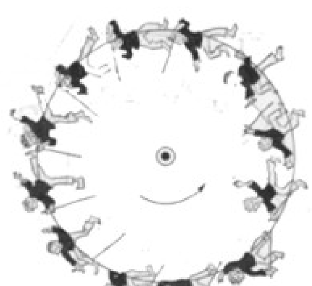
Para aumentar el efecto se pueden situar los palillos en círculo como se muestra en la fig. 49. Si se recorta este dibujo, especialmente repetido y se lo pegan a un cartón o a un papel grueso y luego se le recorta el círculo interior y se lo fijan en el centro de tal forma que pueda girar, dándolo vuelta en un ángulo no grande, se apreciará que de nuevo un palillo ha desaparecido (fig.50).

Figura 49

Figura 50

En este principio, que acabamos de examinar, está basado un juguete muy divertido y gracioso, representado en las figs. I y II

I



II

Se representa la arena de un circo, en cuyos bordes un dibujante situó 13 payasos en posiciones muy belicosas. Pegar el dibujo, I, a una hoja de papel grueso.

Recortar el círculo interior de tal forma que pueda girar alrededor de su centro. Y, ya está, dando una leve vueltecita a dicho círculo se liquida a uno de los payasos (dib. II): en lugar de los 13 anteriores, ante ustedes habrán solamente 12 artistas del género alegre. El payaso, situado dentro del círculo, que avanzaba tan belicosamente contra su colega, desapareció sin dejar huellas.

Si no hubiésemos examinado los ejemplos esquemáticos, dados antes, la desaparición del payaso nos obligaría a rompernos la cabeza largo rato. Ahora la cosa está clara: el payaso se "disolvió" entre la docena de colegas lo mismo que antes se "disolvió" un simple palillo.

Debemos hacer justicia al dibujante, que necesita no poca inventiva y paciencia para conseguir semejante efecto.

97. Una reparación maestra

En el fondo de un buque de madera, durante una navegación, se abrió un rumbo de 13 cm de largo por 5 cm de ancho, es decir, la superficie de la grieta resultó igual a

$$13 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 65 \text{ cm}^2$$

El carpintero del buque tomó una tabla cuadrada con una longitud de los lados igual a 8 cm (es decir, con una superficie igual a 64 cm^2) la serró en cuatro partes A. B, C, D, tal como se muestra en la fig.51, y después unió estas partes de tal forma que resultó un rectángulo precisamente igual al rumbo (fig. 52).

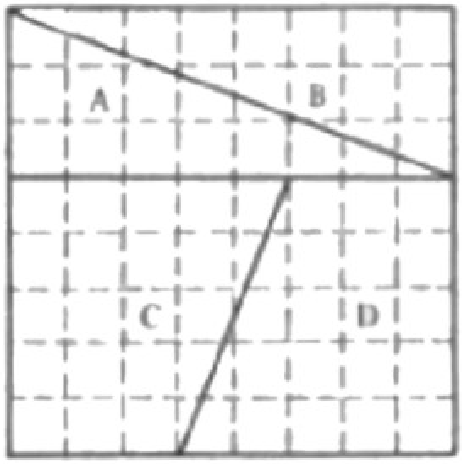


Figura 51

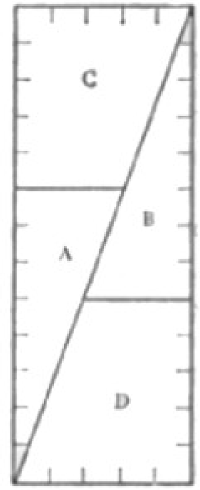


Figura 52

Con este rectángulo, el carpintero cerró la grieta. Así pues resultó que el carpintero convirtió un cuadrado de 64 cm^2 en un rectángulo con una superficie do 65 cm^2 ¿Cómo pudo suceder?

98. Otro sofisma más

He aquí un sofisma más, que puede ser realizado con un cuadrado.

Construir un cuadrado de 8 cm de lado y por consiguiente, con una superficie de 64 cm^2.

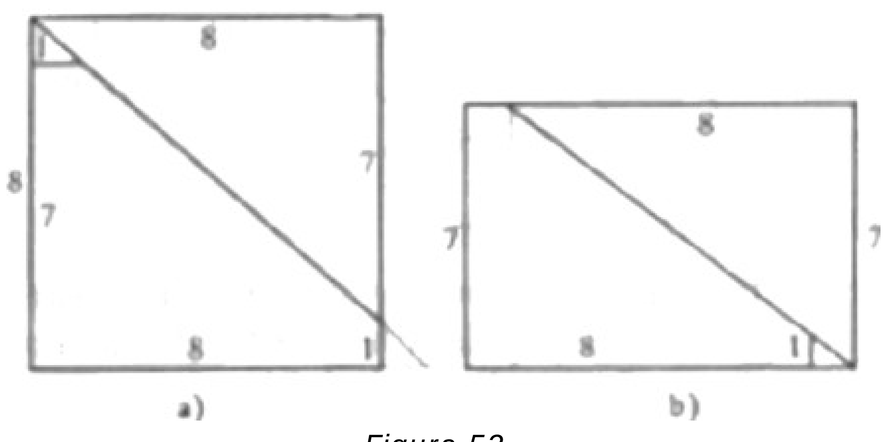


Figura 53

Cortarlo en tres parles, tal como se muestra en la fig.53a. Después, colocar estas partes como so indica en la fig.53b. Se obtendrá un rectángulo, cuya superficie es fácil de calcular:

$$7 \text{ cm} \times 9 \text{ cm} = 63 \text{ cm}^2$$

¿Por qué?

99. Un problema parecido

Construir un rectángulo de 11 cm x 13 cm. Cortarlo por la diagonal (fig. 54) y desplazar los triángulos obtenidos por su hipotenusa común, situándolos en la posición dada en la fig.55. La fisgara formada, conforme a su configuración, está compuesta por un cuadrado VRXS de 12 cm de lado y por lo tanto, con una superficie de 12^2 cm^2 = 144 cm^2, y por dos triángulos PQR y STU, cada uno con una superficie de 0,5 cm^2. Entonces, la superficie de toda la figura 55 es igual a

$$144 \text{ cm}^2 + 2 \times 0{,}5 \text{ cm}^2 = 145 \text{ cm}^2.$$

Pero... ¿cómo es posible si la superficie del rectángulo inicial es igual a

$$13 \text{ cm} \times 11 \text{ cm} = 143 \text{ cm}^2?$$

100. La Tierra y una naranja

Supongamos que el globo terrestre esta ceñido en el echador por un aro y que, de la misma forma, está ceñida también una naranja por su círculo mayor. Supongamos que el perímetro de cada aro aumenta en 1 m. Entonces, por supuesto que los aros se separarán de los cuerpos que ceñían y se formará cierto espacio entre ellos. ¿En cuál de los dos casos este espacio será mayor?

Capítulo 9
Acertijos de números

¿De qué clase de acertijos se trata?

Claro que, en esencia, la cuestión radica no en adivinar enigmas, sino en resolver problemas. Se propone al que lo desee pensar un número sin preguntarle cuál. A cambio de ello le ordenan realizar con el número pensado una serie de operaciones, a primera vista totalmente arbitraria, y decir al "adivinador" el resultado final obtenido. El "adivinador" de tal forma, se hace con el cabo del hilo, tirando del cual va deshaciendo el ovillo hasta llegar al comienzo.

Estos problemas, presentados en una forma ingeniosa y divertida, que cada uno de los participantes del juego puede discurrir a su gusto son muy entretenidos y beneficiosos para todos los jugadores. Con estos acertijos se desarrolla el hábito en el cálculo mental de forma paulatina, ya que se pueden pensar números grandes e pequeños, conforme el deseo y fuerza mental de los jugadores.

Advertimos que en ente capitulo, en la mayoría de los casos, se dan sólo problemas relativamente esquematizados y lacónicos. Concedemos por lo tanto al lector la más amplia libertad para adornar las condiciones de problemas semejantes con el fruto de su fantasía o para adecuarlos a cualquier acontecimiento conocido.

101. Adivinar un número

Distribuir los números del 1 al 12 en círculo (fig.56). Después de hacerlo, puede el lector acertar cualquier número que piense uno de sus amigos.

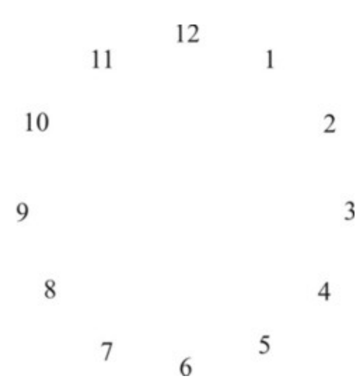


Figura 56

Con el mismo fin es posible utilizar un reloj y proponer a alguien acertar la hora que él piense.

También se puede utilizar un dominó, un cartón del juego al la lotería, etc. ¿Cómo, pues, acertar el número pensado?

Proponer a un amigo que piense cualquier número de nuestro círculo. Después se le indica cualquier número del mismo círculo y, sin decírselo, se le añade a este último número la cantidad de 12 (es decir, la cantidad máxima de números en el círculo).

Se obtendrá cierto número que se enuncia en voz alta. A continuación, proponer al que juega que cuente, para sí, comenzando por el número que ha pensado, hasta el número que usted enunció en voz alta, pero señalando cada vez con el dedo primero el número pensado por usted y después cada uno de los siguientes en orden inverso. Cuando cuente hasta el número pronunciado por usted en voz alta, señalando con el dedo de la forma indicada, se parará precisamente en el número u hora que había pensado. Supongamos, por ejemplo, que alguien piensa el número 5 y que usted le indica, el 9. Añadiendo a este último, sin pronunciarlo, 12 se obtiene 21. Después le propone al que juega:

- "Cuente para sí comenzando por el número que pensó, hasta 21, pero comience a contar señalando con el dedo el número 9, luego el 8, después el 7 y así sucesivamente, yendo por el circulo hasta que cuente 21. Entonces, pronunciando en vez alta el número en que se ha detenido señalando con el dedo.

El que juega cumple lo dicho y, contando de tal forma hasta 21, él mismo le indicará el número 5 pensado.

Se puede presentar este juego de forma más misteriosa, por ejemplo, así.

Alguien piensa un número (supongamos el 5). Usted elige, por ejemplo, el 9, lo añade 12 y obtendrá el 21. Después le pide al que juega:

- Ahora yo voy a golpear con un lapicero (o con el dedo); a cada golpe que dé, añada para sí, una unidad al número pensado. Pero en cuanto llegue al 21, pronuncie en voz alta: "21".

Después de lo acordado, comenzar a golpear primero en el 9, después en el 8, luego en el 7, etc....o en el 12, en el 11 y así sucesivamente.

El que juega, a cada golpe contará para sí: 5, 6, 7...etcétera, pero en cuanto pronuncie en voz alta:"21", eso quiere decir que usted acaba de dar el golpe precisamente en el número por él pensado.

- ¡Ha pensado el número 5! - lo dice.

- ¡Exacto! lo responderá extrañado de cómo lo ha podido acertar, claro, de no ser que él mismo sepa en qué consiste el juego, pues para el que no lo sabe podrá parecerle un truco.

102. ¿Cuántos objetos quedan?

Propóngale a un amigo que tome en cada mano una cantidad igual de objetos (por ejemplo, cerillas). Pero con una condición, que la cantidad de objetos en una mano no sea inferior a cierto número b. Usted no sabe la cantidad de objetos que él ha tomado. Pedirle, a continuación, que pase de la mano derecha a la mano izquierda la cantidad de objetos que usted le pide (por ejemplo, a; claro $a < b$). Después, sin que le diga ni enseñe nada, pedirle que de la mano izquierda se deshaga de tantos objetos, cuantos lo quedan en la mano derecha, y, por fin, que se deshaga de todos los objetos que le quedan en la mano derecha, también sin decirle ni enseñarle a usted cuántos son. Después de hacerlo, le puede asegurar a su amigo, sin vacilaciones, que en la mano izquierda le quedan $2a$ objetos. ¿Por qué?

103. ¿A qué es igual la diferencia?

Propóngale a un amigo que escriba cualquier número de dos cifras y después que las cambie de lugar y que de los números, así obtenidos, reste el menor del mayor. Si le dice cual es la última cifra de la diferencia, usted le podrá decir inmediatamente cual es la diferencia en total. ¿Cómo se hace?

104. ¿A qué es igual el cociente?

Propóngale a un amigo que escriba cualquier número de tres cifras, pero con la condición que las cifras extremas se diferencien una de otra en la cantidad que usted le indique. Después pedirle que en este número permute las cifras extremas. Resultará otro número. Proponerle que de los dos números así obtenidos, reste el

menor del mayor. La diferencia de esta resta siempre se dividirá por 9 y usted siempre podrá decir, por adelantado, cuál será el cociente de esta división.
¿A qué es igual el cuociente?

105. El número 1089

El problema 104 se puede proponer de una forma más amena, sobro todo para los niños. Escribir en un papel el número 1089; colocar el papel dentro de un sobre y cerrarlo. Después proponer a alguien, dándole el sobre, que escriba en él un número de tres cifras, tal que sus cifras extremas sean diferentes y que esa diferencia sea mayor que la unidad. Después, pedirle que cambie de lugar las cifras extremas y que de los dos números, así obtenidos, reste el menor del mayor. Por último, proponerle que en el resultado de dicha resta permute otra vez las cifras extremas y que añada el número obtenido a la diferencia de los dos primeros. Cuando haga la suma, proponerle que abra el sobre. En él encontrará un papel, en el que verá con sorpresa el número 1089, o sea, el mismo número que obtuvo de la suma. ¿Por qué resultó así?

106. ¿Qué número se ha pensado?

Proponerle a un amigo que pienso un número, después que lo duplique y al resultado obtenido que le añada 5. Luego, que multiplique por cinco este último número y que añada al resultado 10. La suma obtenida que la multiplique por 10. Si después de hacerlo se le pregunta qué número, por fin, obtuvo y se le propone restar de ese número 350, la cifra que indica la cantidad de centenas en el residuo será el número pensado. ¿Por qué resulta así?
Supongamos, por ejemplo, que si, ha pensado el número 3. Si lo duplicarnos, obtendremos 6; si añadimos 5, resultará 11; multiplicando por 5, obtendremos 55; si después añadimos 10, resultará 65; si multiplicamos este último número por 10, tendremos 650. Y si, por fin, restamos de este último número 350, tendremos como resultado 300, es decir, tres centenas. O sea, el número pensado es el 3.

107. Una tabla mágica

5	**4**	**3**	**2**	**1**
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31
16	**8**	**4**	**2**	**1**

He aquí una tabla, en cuyas cinco columnas se han escrito, en un orden determinado, todos los números del 1 al 31. Esta tabla se distingue la siguiente "propiedad mágica".

Piense cualquier número (que no sea mayor que 31) e indique solamente en qué columna de esta tabla está escrito. Al instante se "adivina" el número pensado.

Si por ejemplo, ha pensado el número 27, diga solamente que él está en la 1ª, 2ª, 3ª, 4ª ó 5ª columna; al instante se adivina que el número pensado es el 27. (Se puede acortar incluso sin mirar la tabla).

En lugar de una tabla como ésta se puede hacer un abanico mágico. Constrúyalo, o adquiera uno adecuado y en cinco de sus varillas escriba la tabla dada. Después, mientras se abanica, propóngale a su interlocutor que piense un número e indique solamente aquellas varillas del abanico donde está inscrito. Inmediatamente usted acertará el número pensado.

¿Pero, en qué consiste el secreto?

108. Un número par

Piense un número par. Triplicarlo. Tomar la mitad del número obtenido y triplicarla también. Si usted me dice a qué es igual el cociente de la división de este último número por 9, lo diré qué número ha pensado.

Supongamos que pensó el número 6. Después de triplicarlo se obtiene 18, cuya mitad es igual a 9. Triplicándola obtenemos 27. Si dividimos ahora este número por 9 resultará 3, es decir, la mitad del número pensado.

Este truco se puede presentar de una forma más general, proponiendo a quien sea que piense un número entero cualquiera. Pero, en este caso, son precisas algunas modificaciones.

Si el número pensado, después de triplicarlo, no se divide por 2, entonces, será preciso añadir 1 y después dividirlo por 2. A continuación deberá procederse como antes. Pero debe tenerse en cuenta que, en este caso, para adivinar el número pensado, después de hacer la duplicación es preciso, obligatoriamente, añadir 1.

Supongamos, loor ejemplo, que se ha pensado el número 5. Triplicándolo, obtenemos 15. Para dividir este número por 2 es preciso añadir 1, entonces, tendremos 16. La mitad de 16 es 8, triplicando este último obtenemos 24. El cociente de la división, con resto de este número por 9 es igual a 2. Multiplicando este número por 2 y añadiendo al resultado 1, obtenemos 5.

Si hace este truco por primera vez y el número triplicado no se divide por 2, su amigo sin duda que le preguntará: "¿Qué hacer si el número no es divisible por 2?" Esta pregunta le indica que, para acertar el número pensado, al resultado de la duplicación del cociente le debe añadir 1. Usted mismo le puede preguntar si el número es o no divisible por 2. Pero esta pregunta debe formularse de tal forma como si usted quisiese ayudar a su amigo en el cumplimiento de las operaciones aritméticas, no dándole motivo para sospechar que su respuesta puede ayudarle a adivinar el número pensado.

¿En qué consiste el secreto ere este truco?

109. Una modificación del problema anterior

Que su amigo triplique el número pensado, y luego divida el producto por 2. Si de la triplicación resulta un número impar, añadirle una unidad y luego que lo divida por 2. Que triplique nuevamente una de las mitades y que después tome la mitad del número obtenido, añadiendo, como antes, una unidad, si el número que resulta de la multiplicación por 3 es impar. Preguntarle luego a qué es igual el cociente de la división del último número por 9 y pedirle multiplicar dicho cociente por 4. En este caso, es preciso tener en cuenta que si para dividir por 2 la primera vez hubo que añadir 1, el que adivina deberá retener en la memoria 1 y si fue preciso también añadir 1 para dividir por 2 la segunda vez, el adivinador deberá retener en la memoria 2. Por consiguiente, si las dos veces para dividir por ' sin residuo hubo que añadir 1, entonces, después de multiplicar el cociente por 4, al resultado debemos añadirle 3; si la división por 2 no resultaba sin residuo de no añadir 1 sólo la primera vez, entonces, se añade 1; si sólo en la segunda, se añade 2. Como resultado siempre se obtiene el número pensado.

¿Por qué?

Supongamos, por ejemplo, que se ha pensado el número 7; triplicándolo obtenernos 21; para dividirlo por 2 sin residuo es preciso añadir 1; añadiendo una unidad y dividiendo 22 por 2 obtenemos 11; triplicando este último número obtenemos 33; pura dividirlo por 2 es preciso otra vez añadir 1, después de lo cual resulta 34, la mitad de este número es 17. En él la cantidad de 9 es contenida solamente una vez. Por consiguiente, debe tomarse el número 4 y añadir a él 3, ya que la división en la primera y segunda veces se realizó solamente después de añadir 1. Resulta 4 + 3 = 7, es decir, el número pensado.

110. Otra modificación del problema 108

Proponerle a un amigo añadir al número pensado una de sus mitades; a la suma obtenida añadirle la mitad de esta misma suma. Preguntarle después a qué es igual el cociente de la división del último número por 9 y proponerle que multiplique dicho cociente por 4, como se hizo en el problema anterior. Pero también aquí es preciso recordar que si en el primer caso el número no es divisible por 2, se le debe añadir 1 y después hacer la división; de la misma forma deberá obrarse en el segundo caso. Si la división sin resto no se cumple sólo en el primer caso, el ''adivinador'' debe retener en la memoria 1, si sólo en el segundo, 2 y si en ambos casos, 3. Estas cifras deben sumarse correspondientemente al producto de la multiplicación por 4 con el fin de obtener el número pensado.

Por ejemplo, se ha pensado el número 10; añadiendo a él su mitad, obtenemos 15 - número impar - por lo tanto, añadimos 1 y, tomando la mitad del resultado, se tiene 8; sumando 8 a 15 obtenemos 23; en este número el 9 es contenido 2 veces. Dos veces por cuatro es igual a 8, pero a 8 le debemos añadir 2, ya que en el segundo caso para dividir sin resto por 2 hubo que añadir 1. O sea, 8 + 2 = 10, es decir, obtenemos el número pensado.

Si el número pensado es impar, entonces, deberá ser dividido en dos partes, tales que una de ellas sea en una unidad mayor que la otra. Acordemos, para abreviar, denominar el primer sumando mitad mayor, y el segundo, mitad menor. Entonces el problema examinado se puede plantear de otra forma bastante interesante.

Piense un número, añádale su mitad o, si es impar, su "mitad mayor". A esta suma añadirle su mitad o, si es impar, su "mitad mayor". Cuántas veces el número obtenido contiene la cantidad de 9?

A continuación, multiplique esta cantidad de veces por 4. En este caso, al que pensó el número se le deberán hacer las siguientes preguntas: ¿se puede sustraer 8 del resto de la división por 9?

De ser posible, con el fin de obtener el número pensado, al producto de la multiplicación del cociente por 4 se le añade 3. Si no es posible restar 8, deberá preguntársele si es posible restar 5. De serlo, se añade 2. Si no se puede restar 5, entonces, se le pregunta si es posible restar 3 y, de serlo, se añade 1,

Es fácil convencerse que el problema propuesto de esta última forma, de hecho, se reduce a los anteriores, ya que triplicar un número y tomar después la mitad del producto, es lo mismo que añadir a un número su propia mitad y así sucesivamente.

Quien comprenda y asimile por completo las resoluciones de estos problemas con sus modificaciones podrá determinar una multitud de reglas, semejantes a las anteriores, para acertar números pensados.

Se puede, por ejemplo, pedir triplicar el número pensado, después tomar la mitad de la triplicación, pedir que esta mitad se multiplique ya por 5 y tomar la mitad del resultado de la multiplicación. A continuación preguntar a qué es igual el cociente de la división del último número por 15 y multiplicarlo por 4. No olvidando que, lo mismo que en los otros problemas, es preciso añadir al resultado de la multiplicación 1, 2 ó 3 conforme a los casos cuando la división por 2 no fue posible sin resto: en el primero, segundo o en ambos casos.

Un lector atento demostrará todo lo expuesto con facilidad.

También se puede proponer multiplicar el número pensado por 5, tomar la miad del resultado y multiplicarla otra vez por 5; luego dividir el resultado por 2 y el cociente obtenido por 25, multiplicando el resultado por 4. Pero, una vez más advertimos que se debe tener en cuenta los casos cuando la división por 2 se realiza sin resto y cuando no, para añadir 1, 2 ó 3, en los casos necesarios, o no añadir en ninguno de ellos si dichas divisiones y se realizan sin resto.

En una palabra, los problemas ofrecidos se pueden variar de muchas formas.

111. Acertar el número pensado utilizando otro procedimiento

Al principio se debe obrar corno en la resolución de los problemas anteriores, es decir, proponer triplicar el número pensado, tomar la mitad (o la "mitad mayor") del producto obtenido, triplicarlo y tomar de nuevo la mitad (o la "mitad mayor") del resultado logrado. Pero después, en lugar de preguntar a qué es igual el cociente de la división del último número por 9, se puede pedir nombrar todas las cifras que componen a este último número menos una, pero con la condición de que la no nombrada no sea cero.

En este caso, el que pensó el número es preciso que comunique también el orden de estas cifras, tanto el de aquellas que nombró como el de la no nombrada.

Después de esto, para adivinar el número pensado, deberán sumarse todas las cifras mencionadas y de esta suma sustraer 9 tantas veces cuantas sean posibles. El resto que queda después de ello debe restarse de 9 y entonces, resultará la cifra no dicha; cuando el residuo es cero la cifra desconocida es 9. Se obra precisamente así en aquellos casos cuando la división por 2 se realiza sin resto. Si para dividir los resultados de las triplicaciones por 2 fue preciso añadir 1 la primera vez, entonces, a la suma de las cifras conocidas se añade 6 y a continuación m procede de la forma ya explicada.

Si fue preciso añadir 1 solamente la segunda vez, entonces, a la suma de las cifras conocidas le añade 4.

Si fue preciso añadir 1 en ambos casos, entonces, a dicha suma se le añade 1.

Hallando de tal forma la cifra desconocida de la última mitad obtenemos al mismo tiempo, la propia mitad. Dividiendo esta cifra por 9, multiplicando luego este resultado por 4 y añadiendo, cuando sea preciso, 1, 2 ó 3, hallamos el número pensado.

¿En que consiste el secreto?

Por ejemplo, se ha pensado el número 24. Triplicándolo y dividiéndolo dos veces tenernos que la última mitad es 54. Supongamos que el que pensó el número comunica al "adivinador" la primera cifra de esta mitad, o sea, el 5. Sustrayendo 5 de 9 obtenemos la segunda cifra 4. O sea la última mitad es 54. Dividiendo 54 por 9 se obtiene 4. Por consiguiente, el número pensado es 4 x 6 = 24.

Supongamos que el número pensado es 25. Triplicándolo y tomando la mitad de la triplicación, triplicando esta mitad y tomando nuevamente la mitad, obtenemos 57. Pero aquí hay que recordar que en el primer caso para obtener la mitad, tuvimos que añadir 1; por lo tanto, si el que pensó el número declara por ejemplo, la primera cifra, el 5, entonces a 5 se debe añadir 6, de lo que obtenemos 11, quitando 9 obtenemos 2, restando 2 de 9 hallamos la segunda cifra, el 7. O sea, la segunda mitad es 57; en ella la cantidad de 9 es contenida 6 veces. De ellos se deduce que el número pensado es 4 x 6 + 1 = 25.

Supongamos que el piensa el número nos dice que la última mitad del número contiene tres cifras, que dos últimas son 1 y 3 y que dividir por 2 sin resto, la segunda vez tuvo que añadir 1. En este caso, a la suma 1 + 3 = 4 es preciso añadir 4, de lo que resulta 8. Sustrayendo 8 de 9, obtenemos 1. Por consiguiente, la última mitad es 113; esta mitad contiene la cantidad de 9, 12 veces. Por lo tanto, el número pensado es 4 x 12 + 2 = 50.

Exactamente lo mismo se debe obrar si el que pensó el número dice que después de la triplicación y división por 2 obtuvo un número de tres cifras, en el cual la primera es 1 y la última 7 y que en ambos casos, al dividir por 2, se tuvo que añadir 1. Entonces, obramos de la siguiente forma: 1 + 7 + 1 = 9 Restando 9 obtenemos de

resto cero, es decir, la cifra desconocida de la última mitad es 9 y la mitad en total es 197, en la cual la cantidad de 9 está contenida 21 veces.
Por lo tanto, de lo anterior, deducimos que el número pensado es 4 x 21 + 3 = 87.

112. Averiguar el número pensado mediante otro procedimiento

Expondremos un procedimiento que, a primera vista parece más complicado que los otros, aunque se explica muy fácilmente.
Supongamos que alguien piensa un número cualquiera. Entonces, propóngale multiplicar este número por cualquier otro, que usted le indique y dividir el resultado de la multiplicación por cualquier número, también dado por usted; a continuación, que multiplique nuevamente el resultado obtenido por un tercer número indicado por usted, el resultado de esta multiplicación que lo divida de nuevo por un cuarto número expresado por usted y así sucesivamente. Se le puede conceder al que pensó el número que él mismo multiplique y divida la cantidad pensada por los números que quiera, pero con la condición, de que cada vez diga por cuál número multiplica y por cuál divide. Para averiguar el número pensado, el "adivinador" deberá, al mismo tiempo, hacer las mismas operaciones con un número por él elegido. Deteniéndose después en una división cualquiera, pídale que divida el último número obtenido por el número inicial que él pensó. Exactamente lo mismo deberá hacer el "adivinador", o sea, dividir el último número obtenido por el número inicial elegido por él. De tal forma, obtendrá el mismo que el que juega con él. Después de esto, pídale al que juega que añada al cociente de la división el número pensado y que lo diga el resultado. Sustrayendo de dicho resultado el número, conocido por usted, obtendrá el número pensado. ¿Por que?
Supongamos, por ejemplo, quo alguien pensó el número 5. Propóngalo multiplicarlo por 4; el resultado (20) dividirlo por 2 (resultará 10), of número obtenido multiplicarlo por ti (resultará 60), esta última multiplicación dividirla por 4 (resultará 15). Pero, al mismo tiempo, usted también deberá elegir un número cualquiera y realizar con él las mismas operaciones. Supongamos que usted ha elegido el 4 (en general el más cómodo es el 1). Multiplicando por 4 obtiene 16; dividiendo por 2, multiplicando por 6, queda 48; dividiendo este número por 4 tendrá 12. A

continuación, le pide al que pensó el número que divida el último número obtenido, es decir 15, por el número pensado (es decir, por 5). Obtendrá 3.

Si al mismo tiempo usted divide el último número obtenido, o sea 12, por el número que eligió al principio, o sea 4, también obtendrá 3. Fingiendo no conocer el cociente que obtuvo vuestro interlocutor de esta división, le pide que añada a dicho cociente el número pensado y que le diga el resultado; claro que en este caso, le dirá 8. Sustrayendo de 8 el cociente 3, obtenido por usted, hallará el número pensado por su amigo, o sea, el 5.

113. Adivinar varios números pensados

I. Supongamos que alguien piensa una serie impar de cualesquiera números, por ejemplo, de 3, 5, 7. 9, etc. números y que le diga cuál es la suma del primero y segundo números de la serie, después la suma del segundo y tercero, del tercero y cuarto, etcétera y por fin la suma del último número de la serie con el primero.

Anotar esas sumas en el mismo orden que fueron expresadas y adicionar todas aquellas que ocupan lugares impares (es decir, 1°, 3°, 5°, etc.) y después las que ocupan lugares pares (es decir: 2°, 4°, 6°, etc.). Del primer resultado de la adición sustraer el segundo; el resultado de esta resta le dará el duplo del primer número pensado. Tomando su mitad obtendrá el primer número pensado. Conociendo este número, no será difícil hallar los restantes, puesto que las sumas del primero con el segundo, del segundo con el tercero, etc., son conocidas.

¿Por qué resulta así?

II. Si es que alguien piensa una serie par de números, lo mismo que en el problema anterior, deberá decirle cuáles son los sumas de estos números de dos en dos (del primero con el segundo, del segundo con el tercero, etc.,) pero el final deberá decirle no la suma del último más el primero, sino del último más el segundo números. Después, como en el caso anterior, se adicionan todas las sumas que ocupan lugares impares, excepto la primera y, a continuación, las que ocupan los lugares pares. Del segundo resultado de estas adiciones se resta el primero. La diferencia le dará el duplo del segundo número pensado

¿Por qué?

114. Adivinar un número pensado sin hacer preguntas al que lo ha pensado.

Propóngalo a alguien que piense un número, después que lo multiplique por otro cualquiera que usted le indique; al resultado que le añada otro número cualquiera dado por usted y que divida este resultado de la suma por otro número cualquiera que también le propondrá. Al mismo tiempo, divida de memoria el multiplicador por el divisor que le indicó. Cuantas unidades y partes de unidades componen el cociente de dicha división, tantas veces propóngale que reste el número que pensó del cociente de la división efectuada.

Después de realizar estas operaciones podrá inmediatamente decirlo a su interlocutor cuál es el resto que obtuvo de la sustracción. Este resultado siempre será igual al cociente de la división del número que le dio para añadir al producto de la multiplicación, por el divisor, también indicado por usted.

¿Por qué?

Supongamos, por ejemplo, que alguien piensa el número 6; propóngale que lo multiplique por 4, resultará 24; pídale que le añada 15, resultará 39. Después que divida lo obtenido por 3, con un resultado de 13. Dividiendo a un mismo tiempo de memoria 4 por 3 obtendrá 4/3 ó 1 1/3. Por lo tanto, propóngale al que pensó el número restar del cociente, que obtuvo de la división, el número pensado más un tercio del mismo (o sea, seis más dos, en total ocho): 13 - 8 = 5, quedan 5. El mismo resultado se obtiene si divide el número 15 por el divisor 3, ambos dados por usted.

Aquí este problema se plantea de una forma bastante generalizada. Con frecuencia se utiliza un caso particular, o sea, se propone duplicar el número pensado, después añadir al resultado cualquier número par, a continuación dividir la suma obtenida por 2 y del cociente restar una vez el número pensado. Claro que el residuo siempre será igual a la mitad del número par, antes añadido. No obstante, como es lógico, resulta más interesante resolver estos problemas en su forma general. Tanto más que ello permite adquirir práctica en operaciones con quebrados. Si por cualquier razón es indeseable obtener quebrados, para evitarlo, siempre se pueden elegir tales números que de las operaciones no resulten quebrados.

115. ¿Quién eligió el número impar?

Tenemos dos números, uno par y otro impar. A dos personas se les propone que elijan: una el par y otra el impar a su gusto. Es preciso adivinar quién de ellas eligió el número par y quién el impar.

Usted le propone, por ejemplo, A Piotr o Iván dos números (uno par y otro impar) digamos 10 y 9. Sin que usted lo sepa, uno elige el número par y otro el impar. Para averiguar qué número eligió cada uno de ellos, también usted toma dos números, par e impar, por ejemplo, el 2 y el 3. Propóngale a Piotr que multiplique su número por 2 sin pronunciar el resultado y a Iván, por 3. Después pídales que sumen ambos productos y que le digan cuál fue la suma obtenida. O que le comuniquen solamente si dicha suma es par o impar, ya que para usted es importante saber sólo eso. Si desea hacer el problema más confuso, para averiguar lo necesario puede utilizar otro procedimiento (proponiéndoles, por ejemplo, dividir la suma obtenida por 2 y preguntándoles si se divide sin resto, etc.). Supongamos que usted sabe que el resultado de la suma es par, entonces, está claro que el número multiplicado por 3 es par, o sea, Iván eligió el número par, 10 y Piotr, el impar, 9. SI el resultado de la suma es impar, entonces, también está que eligió el número impar aquél a quién le propuso multiplicar por 3.

Argumente este procedimiento de averiguación.

116. El mismo problema con dos números primos entre si

Proponer a dos amigos elegir cualquier de dos números dados. Estos números deben ser primos entre al como, por ejemplo, el 9 y el 7 y además uno de ellos tiene que ser no primo (en nuestro caso, el 9). Los factores por los cuales desea multiplicar los números elegidos, también deben ser primos entre sí y tales, que uno de ellos sea contenido una cantidad entera de veces en uno de los números dados a elegir.

Por ejemplo, si se toman 3 y 2, entonces, estos números son primeros entre sí y, además, 3 es factor de 9. Después propóngale a uno de sus amigos que multiplique el número elegido por 2, y al otro, por 3; que sume luego los resultados obtenidos y que lo diga, o la suma obtenida, o si es divisible esta suma por aquel factor dado, contenido una cantidad entera de veces en uno de los números propuestos, (en nuestro caso es preciso saber si la suma obtenida se divide por 3). Después de saber esto, se puede inmediatamente determinar qué número ha elegido cada uno de los dos amigos. Pues, es lógico que si la suma obtenida se divide por 3, quiere decir que por 3 fue multiplicado el número no divisible por 3, o sea el 7, y viceversa, si la suma obtenida no se divide por 3, el número multiplicado por 3 fue el 9, divisible por 3. Exactamente lo mismo se procede en aquellos casos, cuando se toman y proponen otros números, pero con la única condición de que dichos números satisfagan las condiciones expuestas al principio.

Dar una explicación a este procedimiento de adivinación.

117. Acertar varios números pensados, si es que cada uno de ellos no es mayor que diez

Propóngalo al que pensó los números multiplicar el primero de ellos por 2 y al resultado añadirle 5; multiplicar la suma obtenida por

5 y al resultado sumarle 10. Al número resultante agregarles el segundo número pensado y multiplicar la cantidad obtenida por 10; a este resultado añadirle el tercer número pensado y otra vez multiplicarlo por 10; después sumar el cuarto número pensado y repetir la multiplicación por 10 y así sucesivamente. En una palabra, si él pensó varios números no mayores que diez, debe multiplicarlos sucesivamente por 10 y el producto sumarle por orden uno de los números pensados, basta llegar al último. Después que le diga cual es la última suma obtenida; si es que pensó sólo dos números, entonces, restando de esta última suma 35 verá que la cantidad de decenas en el residuo da el primer número pensado y que la cantidad de unidades, el segundo. Si los números pensados son tres, de la última -suma que obtuvo es resta 350, entonces, la cantidad de centenas en el residuo da el primer número pensado; la cantidad do decenas, el segundo, y la castidad de unidades el tercero. Si los números pensados son cuatro, de la última suma que obtuvo se resta 3500, entonces, la cantidad de miles en la resta da el primer número pensado; la cantidad de centenas, el segundo; la cantidad de decenas, el tercero, y la cantidad de unidades, el cuarto. Es lógico, que en el caso cuando los números pensados son cinco, de la última suma deberá restarse 35000 y así sucesivamente.

Supongamos, por ejemplo, que los números pensados son: 3, 5, 8, 2. Duplicando el primero obtenemos 6; añadiéndole 5, resulta 11; multiplicando este resultado por 5, tendremos 55; sumándole 10, obtenemos 65; agregando el segundo número pensado nos da 70; multiplicando por 10, nos queda 700; sumando el tercer número pensado resultará 708; multiplicando este último por 10 obtenemos 7080; sumando el cuarto número pensado resultará 7082. Si ahora de ella última suma restamos 3500 logramos un resultado de 3582, que contiene, en orden sucesivo, los números pensados: 3, 5, R, 2.

Dar explicación a este procedimiento de averiguación.

Es lógico que este problema se pueda modificar adecuándolo a muchos casos particulares. Así, por ejemplo, durante el juego a los dedos, utilizando la resolución de este problema, se puede adivinar la cantidad de puntos que marca cada uno do los dados tirados. Y esto aún es más fácil, ya que la cantidad de puntos en cada dado no es mayor que seis. El procedimiento y reglas de averiguación son absolutamente los mismos.

Capítulo 10
Juegos con números y objetos

118. Obtener una unidad mediante tres cincos
Utilizando tres cincos y cualesquiera signos matemáticos, escribir una expresión igual a la unidad.
Si nunca ha probado solucionar problemas semejantes, tendrá que pensar bastante antes de hallar una solución correcta. He aquí la solución del problema ofrecido:

$$1 = (5/5)^5$$

Tratar de hallar otras soluciones.

119. Obtener un dos mediante tres cincos
¿Cómo escribir una expresión igual a dos utilizando tres cincos?

120. Obtener cuatro mediante tres cincos
¿Cómo escribir una expresión igual a cuatro utilizando tres cincos?

121. Obtener cinco mediante tres cincos
¿Cómo escribir una expresión igual a cinco utilizando tres cincos?

122. Obtener cero mediante tres cincos
¿Cómo escribir una expresión igual a cero utilizando tres cincos?

123. Obtener 31 con cinco treses
¿Cómo escribir una expresión igual a 31 utilizando cinco treses?

124. Un billete de autobús
En un autobús su billete tiene el número 524127. Sin cambiar el orden de las cifras, probar de poner entre ellas signos matemáticos de tal forma que resulte una expresión igual a 100. Estos ejercicios son muy entretenidos y pueden ser un

agradable pasatiempo en un viaje largo, si de la misma forma prueba obtener 100 con las cifras del número de vuestro billete. Viajando en grupo, se puedo apostar sobre quién lo logra primero.

125. ¿Quién dice el primer "cien"?

Dos individuos, por turno, pronuncian cifras arbitrarias no superiores a 10. Estas cifras se suman consecutivamente y gana aquél que alcance el primer cien.

Si, por ejemplo, el primero pronuncia "7" y el segundo "10" de la suma resultará "17"; si a continuación el primero pronuncia, digamos, "5", resulta "22", si el segundo, pronuncia, por ejemplo, "8" serán "30" y así sucesivamente. Ganará aquel que obtenga el primero "100".

¿Cómo obrar para, con seguridad, ser el primero en llegar a "cien"?

126. Generalización

El problema anterior se puede ofrecer también de la siguiente forma.

Dos individuos pronuncian, por turnos, cifras arbitrarias, no superiores a un límite determinado. Estas cifras se suman consecutivamente y gana aquél que obtiene primero un número acordado de antemano.

¿Cómo hacer para alcanzar primero dicho número?

127. Formar grupos de a 2

Diez cerillas están colocadas en fila (fig. 57). Es preciso distribuirlas por pares (en total cinco) haciendo pasar cada cerilla por encima de dos seguidas (por ejemplo, la primera se pasa a la cuarta).

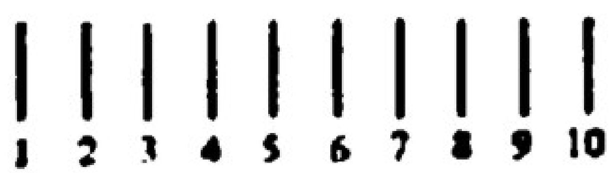


Figura 57

128. Formar grupos de a 3

Quince cerillas están colocadas en fila. Es preciso unirlas en 5 montoncitos, de tres cerillas cada uno, tomando cerilla por cerilla y haciendo pasar cada una de ellas por encima de tres seguidas.

129. Una pirámide de discos para niños

Tomemos ocho discos de madera o cartón grueso con diámetro decreciente y 3 palillos (varillas) fijados a una base en posición vertical. Los discos tienen un agujero en el centro, lo que permite colocarlos, comenzando por el mayor, en uno de los palillos A. Este juguete se llama pirámide de 8 pisos (fig. 58).

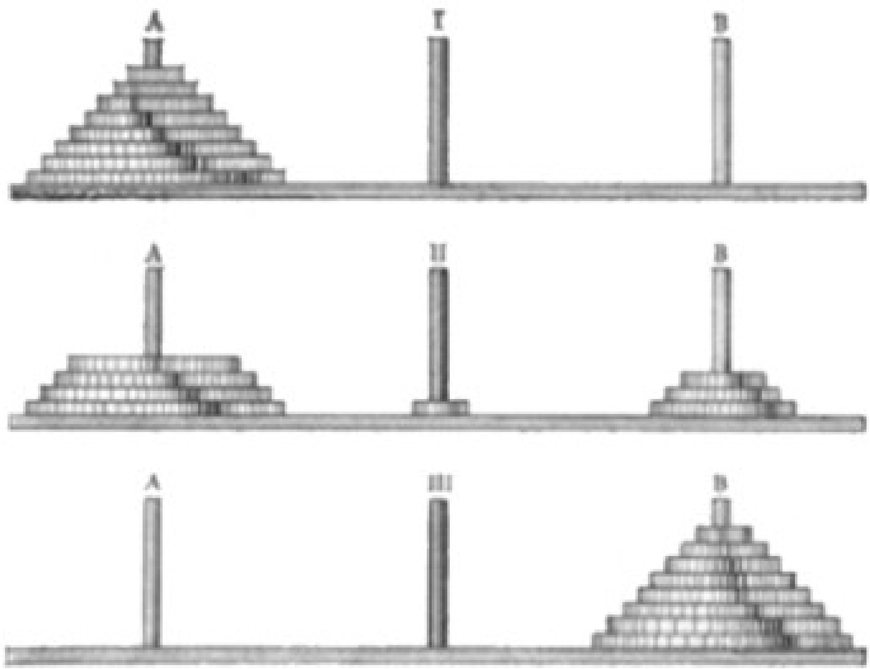


Figura 58

Se requiere trasladar la pirámide del palillo A al palillo B utilizando para ello un tercer palillo (I, II, III en nuestro dibujo) auxiliar y ateniéndose a las siguientes condiciones:

1. no trasladar más de un disco por vez;

2. el disco quitado deberá colocarse en un palillo libre o sobre un disco de mayor diámetro; en ningún palillo se permite poner un disco mayor encima de otro menor.

Leyenda. Si en lugar de 8 discos tomamos 64 se nos planteará un problema relacionado con una leyenda hindú antigua. Según la misma, on la ciudad de Benarés en la cúpula del templo principal, en el lugar donde se encuentra el centro de la Tierra, el dios Brahma colocó sobre una placa de bronce tres varillas de diamante en posición vertical; cada una de ellas tiene un codo de largo y el grosor del cuerpo de una abeja. Durante la creación del Mundo, en una de estas varillas fueron colocados 64 d discos de oro puro cada uno con un agujero en el centro formando una especie de cono truncado, dado que los diámetros de los discos van en orden creciente comenzando desde arriba. Los sacerdotes del templo trabajan día y noche sin cesar, cambiándose unos a otros, con el afán de traspasar esta columna de discos de la primera varilla a la tercera, utilizando para ello, la segunda como auxiliar y obligados a observar las siguientes condiciones:

1. traspasar un sólo disco por vez;
2. colocar el disco quitado en una varilla libre e^{n} dicho momento, o sobre un disco de mayor diámetro.

Cuando, observando estas condiciones, los sacerdotes consigan traspasar los 64 discos do la primera varilla a la tercera, comenzará el fin del Mundo...

130. Un juego interesante

Probar con vuestro amigo jugar el siguiente juego. Colocar sobre una mesa tres montoncitos de cerillas. Por ejemplo, de 12, 10 y 7 cerillas. El juego consiste en tomar, alternándose, cualquier cantidad de cerillas en los montoncitos, pero en un montoncito a la vez. Se pueden tomar de sola vez todas las cerillas de un montoncito. Gana aquél que tome las últimas cerillas. Veamos, como ejemplo, a jugarnos una partida. Uno de los jugadores será A y el otro B.

Posición Inicial	-	12	10	7
Después de jugar	A	12	10	6
"	B	12	7	6
"	A	1	7	6
"	B	1	5	6
"	A	1	5	4
"	B	1	3	4
"	A	1	3	2
"	B	1	2	2
"	A	0	2	2
"	B	0	1	2
"	A	0	1	1
"	B	0	0	1

La última jugada le toca al jugador A y gana. La pregunta consiste en lo siguiente: ¿puede A jugar de tal forma que siempre gane?

Capítulo 11
El dominó

Nota histórica

Se supone que el juego al "dominó" llegó a nosotros de los hindúes o griegos antiguos. En efecto, la simplicidad de este juego nos hace pensar de que fue inventado en tiempos muy remotos, en loe albores de la civilización. En lo que se refiere al procedimiento del nombre, dado a este juego, existen muchas divergencias. Los filólogos buscan su raíz en lenguas antiguas, pero la suposición más probable es la siguiente. El juego al dominó era permitido en monasterios católicos y comunidades religiosas. Pero, como es sabido, en estos lugares todo comenzaba con bendiciones a Dios. Y cuando el jugador ponía la primera ficha pronunciaba: "*benedicamus Domino*" es decir, "bendecimos al Señor" o bien "*Domino gratias*" o sea, "Gracias al Señor". De aquí surgió el nombre del juego "dominó".

131. Un sorprendente adivinador

Diez fichas del dominó están puestas "boca abajo" en un orden creciente de los puntos de derecha a izquierda, o sea, uno, dos, tres puntos, etcétera. El "adivinador" acuerda con los presentes que mientras él se retira a otro cuarto o se vuelve de espaldas, ellos cambian de lugar cuantas fichas quieran, pero con la única condición que no se altere el orden correlativo, tanto de las fichas cambiadas, como de las no cambiadas, El adivinador regresa y se compromete a adivinar, no sólo la cantidad de fichas movidas, sino también a levantar aquella ficha, cuya cantidad de puntos es igual a la cantidad de fichas movidas.

Y, efectivamente resulta que la ficha necesaria siempre se puede encontrar. Para ello no hacen falta incluso "suposiciones", hasta con el más simple cálculo aritmético, que no sale de las primeras diez cifras.

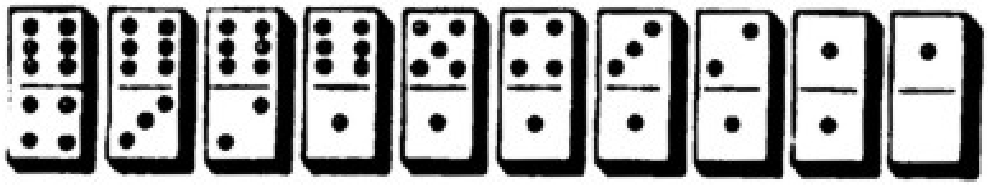


Figura 59

Examinemos este truco con más detalle. Para ello, damos vuelta las fichas del dominó. Al principio, las fichas están colocadas de derecha a izquierda como se muestra en la fig.59

El "adivinador" se retira a otra habitación y aquél que desee comprobar sus cualidades, maravillosas cambia de lugar varias fichas, de derecha a izquierda, no alterando la posición relativa de las mismas y después coloca las fichas en fila como estaban antes. Supongamos, por ejemplo, que la primera vez se cambian de lugar 4 fichas. Entonces, el nuevo orden será el de la fig.60.

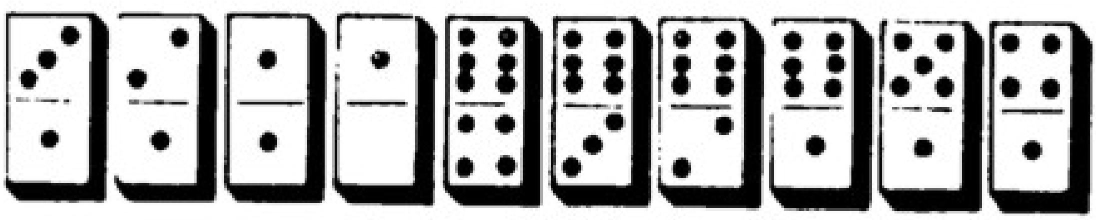


Figura 60

Es evidente que la primera ficha de la izquierda tiene cuatro puntos, lo que corresponde a la cantidad de fichan cambiadas. Por eso, en cuanto regresa el adivinador lo primero que hace es levantar esa ficha, ponerla sobre la mesa y decir: "Han sido cambiadas cuatro fichas del dominó". Para provocar mayor interés se puede obrar con un poquito de picardía. Aunque la cuestión consiste en ver cuantos puntos tiene la ficha de la izquierda, el "adivinador" puede fingir que sabe qué cantidad de fichas se han cambiado y que levanta la ficha a la izquierda solamente para confirmarlo con más fuerza.

Más adelante, el juego adquiere una forma más sorprendente e interesante. Las fichas quedan en el mismo orden y el adivinador se retira de nuevo sabiendo que la última ficha de la izquierda tiene cuatro puntos. Independientemente de la cantidad de fichas que sean cambiadas de lugar durante su ausencia (otra vez de derecha a izquierda sin alterar el orden) si al regresar levanta la quinta ficha (4 + 1+= 5), contando de la izquierda a derecha, la cantidad, de puntos en ella siempre corresponderá a la cantidad de fichas cambiadas. Supongamos que la segunda vez se han cambiado de derecha a izquierda tres fichas.

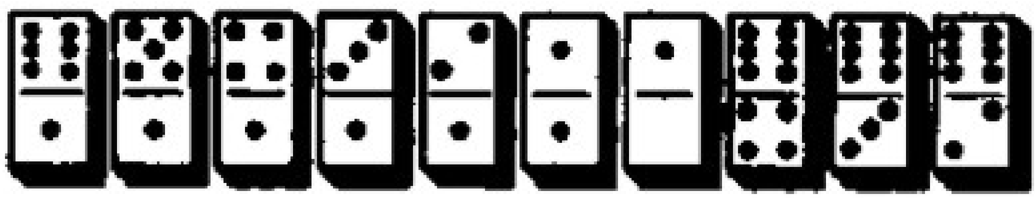


Figura 61

Entonces, resultará un orden de las fichas igual al dado en la fig.61 y, efectivamente, la quinta ficha, contando por la izquierda, contiene tres puntos. Después de levantar y poner en su sitio esta ficha, no será ya difícil, sin necesidad de mirar, calcular que ahora la última ficha de la izquierda contiene siete puntos. Sin olvidar esto, el adivinador propone cambiar nuevamente cualquier cantidad de fichas, de derecha a izquierda, y se retira por tercera vez sabiendo, de antemano, que al regresar debe levantar la octava ficha y que la cantidad de puntos en ella coincide con la cantidad de fichas cambiadas de lugar durante su ausencia.

En general, sabiendo la cantidad de puntos que contiene la última ficha de la izquierda, lo que como vemos no es difícil, añadiendo a esta cantidad una unidad y luego contando de izquierda a derecha, siempre encontrará la ficha, cuyos puntos indican la cantidad de fichas cambiadas.

Además, es fácil ver que para cada ficha la suma de sus puntos más su número en la fila es precisamente igual al número de la ficha que debemos descubrir la siguiente vez (si la suma es mayor que 10, entonces, de ella se sustrae 10). Esto simplifica toda clase de razonamientos, puesto que es suficiente añadir a la suma de los puntos de la ficha descubierta su número, para obtener el número (puede ser y después de restar 10) de la ficha que debemos descubrir la siguiente vez. En el ejemplo examinado se descubrió la quinta ficha (que contenía tres puntos. Por lo tanto, la siguiente vez se debe levantar la octava ficha (5 + 3 = 8).

Como vemos, este truco el muy fácil, pero sumamente impresionante. Es de resolución fácil y cualquiera que lo desee puede hacerlo.

132. Una adivinación justa

Tome veinticinco fichas del dominó, colóquelas "boca abajo" y una tras otra de tal forma que sean contiguas por los lados mas largos. A continuación, déle las espaldas o incluso retírese a otra habitación, para que alguien cambie de lugar, pasando del lado derecho al izquierdo, cierta cantidad de fichas (pero no superior a doce). Al regresar a la habitación, inmediatamente descubrirá la ficha, cuya cantidad de puntos lo indica, sin duda, la cantidad de fichas traspasadas durante su ausencia.
¿Cómo hacerlo?

133. La suma de todos los puntos del dominó.

Determine la suma de los puntos que contienen todas las fichas del dominó.

134. Un pequeño truco

Coloque "boca abajo" todas las fichas del dominó sin los dobles. Esconda una ficha, sin que nadie se dé cuenta, pero que no sea doble.
Después proponga a alguien tomar una ficha cualquiera, mirarla y ponerla sobre la mesa "boca arriba". A continuación, pídale que descubra las restantes fichas del dominó y que las una conforme a las reglas del dominó, comenzando por la primera que descubrió, pero sin cerrar el juego. Las fichas tomarán cierta posición en la fila, y usted podrá anticipar la cantidad de puntos que se obtienen en cada extremo de esta fila. Estas cantidades serán precisamente las mismas que contiene cada cuadrado de la ficha que escondió.
Evidentemente, si colocamos todas las fichas del dominó una tras otra, en el orden requerido por las reglas de este juego, es decir, que las fichas sucesivas se unen por los cuadrados con igual cantidad de puntos, la fila de fichas siempre terminará con la misma cantidad de puntos que comenzó. Si, por ejemplo, la fila de fichas comienza por el cuadrado de una de ellas con cinco puntos, entonces, terminará también en un cuadrado de cinco puntos. Claro está, con la condición que la fila no

se cierre hasta que no estén colocadas todas las fichas. Así, el total de 21 fichas sin los dobles se pueden unir ateniéndose a las reglas del juego, formando un círculo cerrado, pero si de él se extrae, por ejemplo, la ficha (3, 5) es evidente que la fila de fichas comenzará con cinco y terminará en tres.

Con esto pequeño truco se puede provocar el interés de aquellos que no saben en qué radica el asunto, sobre todo si se insinúa la realización de complicados cálculos de memoria. Es también conveniente que al repetir el truco lo varíe en lo posible.

135. La máxima cantidad

Supongamos que juegan al dominó cuatro personas, en forma individual y no por pares. Al comienzo del juego cada jugador tiene siete fichas. La distribución de estas fichas entre los jugadores puede crear situaciones muy curiosas, cuando, por ejemplo, el primer jugador gana forzosamente, mientras que el segundo y tercero no ponen en el juego ni una ficha. Supongamos que el primer jugador tiene sus cuatro primeros ceros (blancas) y los tres últimos unos, o las siguientes fichas:

(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)

el cuarto jugador, digamos, los restantes unos y ceros, o sea las fichas

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6)

y cualquiera otra ficha. Las demás fichas están distribuidas entre el segundo y tercer jugadores. En este caso, el primer jugador gana después de ser puestas las 13 fichas antes indicadas, mientras que el segundo y tercer jugador no colocan ninguna.

En efecto, el primer jugador comienza la partida y pone (0, 0). El segundo y tercero "pasan" puesto que no tienen fichas que casen. Entonces, el cuarto jugador puede poner cualquiera de las tres fichas (0, 4), (0, 5) ó (0, 6). Pero el primero responde con (5, 1) ó (6, 1). El segundo y tercero otra vez no pueden poner ninguna ficha, el cuarto coloca (1, 1), (1, 2) ó (1, 3), a lo que el primero puede responder con (1, 0), (2, 0) ó (3, 0) y así sucesivamente. De tal forma, el primer jugador pone todas sus fichas mientras que el segundo y tercero se quedan con todas las que tenían y el cuarto, con una. ¿Cuántos puntos gana el primer jugador? La suma de los puntos de las 13 fichas jugadas, como vemos, es igual a 48, la suma de todo el juego es de 168. Entonces, el primer jugador gana 168 - 48 = 120 tantos en una partida. Esta es la máxima cantidad de puntos posible.

También se pueden componer otras partidas, semejantes a la anterior. Para ello basta con reemplazar respectivamente las fichas con ceros y unos por otras con otros números de puntos: 2, 3, 4, 5 ó 6. La cantidad de estas composiciones, por consiguiente, es igual a todas las combinaciones simples de siete elementos tomados, de dos, o sea es igual a 21. Es evidente que la probabilidad de obtener una partida así, de forma casual, es sumamente pequeña. Además, todas las otras partidas, a excepción de la antes analizada, dan menos de 120 puntos ganados.

136. Un cuadrado de 8 fichas

¿Será posible construir un cuadrado con 8 fichas del dominó, tal, que cualquier línea recta trazada en él intersecte, par lo menos una ficha? El cuadrado mostrado en la fig. 62 no sirve, ya que la recta AR no intersecta ninguna ficha.

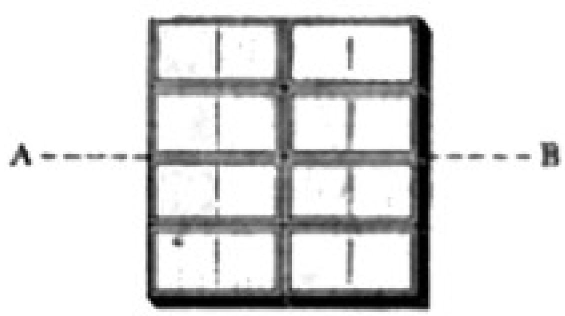


Figura 62

137. Un cuadrado de 18 fichas

¿Se puede construir un cuadrado con 18 fichas del dominó que satisfaga las condiciones del problema anterior?

138. Un rectángulo de 15 fichas

¿Será posible construir un rectángulo con 15 fichas del dominó que satisfaga las condiciones del problema 113?

Capítulo 12
El juego de damas

139. Permutar las fichas

Cuatro fichas blancas y cuatro negras están situadas tal como se muestra en la fig. 63.

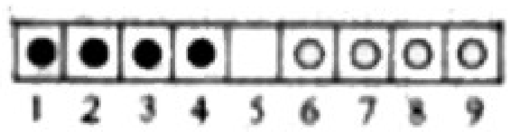


Figura 63

Es preciso pasar fichas blancas a las canillas con los números 1, 2, 3, 4 y las fichas negras a las casillas con los números 6, 7, 8, 9 observando las siguientes condiciones:

1) cada ficha puede pasar a la casilla más cercana o saltar una casilla, pero no más;
2) ninguna ficha deberá regresar a la casilla donde ya estuvo antes;
3) en cada casilla no puede haber más de una ficha; deberá comenzarse moviendo una ficha blanca.

Se puede proponer este juego tomando cualquier cantidad do fichas blancas y la misma de negras. Ya con cuatro fichas (2 blancas y 2 negras) este juego resulta interesante para niños do edad preescolar.

140. Cuatro pares

Tomar cuatro fichas blancas y 4 negras y colocarlas en fila en orden alternativo: blanca, negra, blanca, negra y así sucesivamente. Se permite utilizar dos casillas libres pero solamente para pasar dos contiguas, no cambiando el orden en que están. Observando estas condiciones es preciso, en cuatro jugadas, de dos en dos fichas, distribuirlas de tal forma que resulten en fila primero cuatro fichas negras y a continuación cuatro blancas.

141. Cinco pares

Poner en fila cinco fichas blancas y cinco negras en orden alternativo: blanca, negra, blanca, negra y así sucesivamente. Utilizando dos casillas libres y pasando a ellas de dos en dos fichas contiguas sin cambiar el orden relativo do las misinas, es preciso, en cinco jugadas, distribuir todas las fichas de tal forma que resulten en fila primero las negras y a continuación las blancas.

142. Seis pares

Se han puesto en fila en orden alternativo seis fichas blancas y seis negras: blanca, negra, blanca, negra y así sucesivamente (fig. 64).

Figura 64

Utilizando dos casillas libres y pasando a ellas de dos fichas contiguas sin cambiar su orden recíproco, es preciso, en seis jugadas, situar en fila primero todas las fichas negras y después todas las blancas.

143. Siete pares

Se han colocado en fila 7 fichas blancas y 7 negras en orden alternativo: blanca, negra, blanca, negra y así sucesivamente (fig. 65).

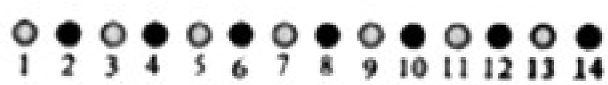


Figura 65

Utilizando dos casillas libres y pasando a ellas de dos en dos fichas contiguas sin cambiar su orden reciproco, es preciso, en siete jugadas, distribuir todas las fichas de tal forma que resulten en fila primero todas las negras y a continuación todas las blancas.

144. Cinco líneas, 10 fichas

Trazar en un papel cinco líneas rectas y disponer en ellas 10 fichas, de tal forma que en cada línea haya 4 fichas.

145. Una distribución interesante

Disponer en círculo o en fila 12 fichas negras y 12 blancas, de tal forma que comenzando a contar desde la primera ficha se retire del círculo o fila cada séptima ficha y que al final resulten retiradas todas las fichas blancas, mientras que las negras quedan en su sitio.

Capítulo 13
El ajedrez

Con relación al número de 20 cifras, dado en la resolución del problema 129, existe otra leyenda, también de procedencia hindú, que nos relata el escritor árabe Asafad. El brahmán Sessá, hijo de Dahera, inventó el juego al ajedrez, cuyo rey, siendo la figura más importante, no puede dar un paso sin la ayuda y defensa de sus súbditos: los peones y otras figuras. Inventó este juego para entretenimiento de su monarca y soberano de la India, Sherám. El monarca Sherám, admirado del Invento de su brahmán, prometió darle todo lo que pidiese.

- Entonces - dijo Sessá - ordena que me den tantos granos de trigo, cuantos resulten de colocar en la primera casilla del tablero de ajedrez un grano, en la segunda 2, en la tercera 4, la cuarta 8 etc., o sea, duplicando la cantidad de granos hasta llegar a la sexagésimo cuarta casilla.

El soberano de la India no pudo hacerlo. La cantidad de granos exigidos se expresaba por un número de veinte cifras. Para satisfacer el "modesto" deseo del brahmán sería preciso ocho veces sembrar toda la superficie del globo terrestre y ocho veces recoger la cosecha. Solamente entonces se obtendría la cantidad de granos que pedía Sessá.

¡Prometer "todo lo que se quiera" es fácil, pero es difícil cumplir la promesa!

146. Cuatro caballos negros

En un tablero del ajedrez se tienen cuatro caballos (fig.66).

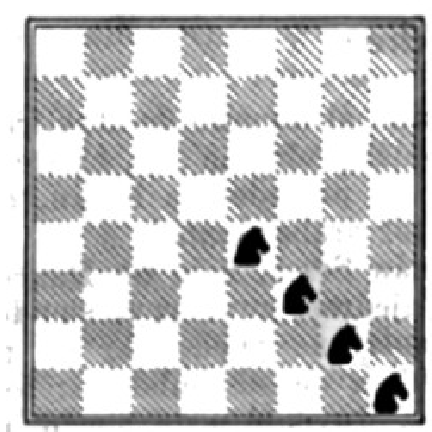


Figura 66

Es preciso dividir el tablero en 4 partes, iguales en cuanto a su configuración, de tal forma que en cada parte haya exactamente un caballo.

147. Un peón y un caballo

Poner en el tablero de ajedrez un peón. ¿Podrá un caballo, situado en una de las casillas libres, pasar por todas las casillas restantes y regresar a la inicial, pasando por cada casilla libre sólo una sola vez?

148. Dos peones y un caballo

Colocar dos peones en dos ángulos opuestos del tablero del ajedrez. ¿Podrá un caballo pasar por las casillas restantes, observando las condiciones del ejercicio anterior?

149. Un caballo

¿Podrá un caballo pasar por las 16 casillas centrales de un tablero de ajedrez, permaneciendo en cada una de ellas una sola vez?

150. Los escarabajos

Supóngase que ha conseguido prender 25 escarabajos y poner uno en cada casilla de una parte del tablero del ajedrez de 5 x 5 casillas (fig. 67).

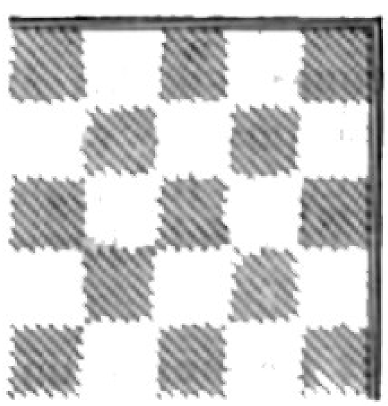


Figura 67

Ahora vamos a suponer que cada escarabajo pasa a la casilla contigua por la horizontal o vertical. ¿Qué le parece, quedarán casillas libres después de que pasen?

151. Escarabajos en un tablero del ajedrez

¿Cuál será la respuesta al problema anterior para todo el tablero del ajedrez de 8 x 8 casillas?

152. El camino cerrado de un escarabajo

¿Podrá un escarabajo, puesto en cualquier casilla del tablero del ajedrez y caminando de casilla a casilla contigua en sentido vertical u horizontal, pasando una sola vez por todas las casillas del tablero, regresar a la inicial?

153. Un peón y un dominó

Supongamos que tenemos un tablero de ajedrez y 32 fichas del dominó, cada una de ellas con un tamaño igual a dos casillas del tablero. En una casilla cualquiera del tablero ponemos un peón. ¿Será posible después cubrir la parte restante del tablero con lar fichas del dominó, de tal forma que ninguna de ellas sobresalga del tablero y que no haya fichas encimadas?

154. Dos peones y un dominó

Poner dos peones en dos ángulos opuestos del tablero. ¿Será posible cubrir la parte restante del tablero con las fichas del dominó, observando las condiciones del ejercicio anterior?

155. Otra vez dos peones y un dominó

Poner dos peones en dos casillas de diferente color. ¿Será posible cubrir la parte restante del tablero con las fichas del dominó?

156. Las figuras del ajedrez y el dominó

¿Cuántas figuras del ajedrez será preciso poner en un tablero para que en él no se pueda colocar ni una ficha del dominó?

157. Sobre las ocho reinas

En un tablero de ajedrez, compuesto por 64 casillas, distribuir ocho reinas de tal forma que ninguna de ellas pueda matar a otra. Es decir, en ocho casillas del tablero de ajedrez colocar ocho reinas, de tal forma, que los pares de ellas no estén situadas en ninguna línea paralela a cualquier borde y en ninguna línea paralela a cualquier diagonal del tablero.

A la resolución de este problema se dedicó el famoso matemático alemán Gauss. Mostraremos algunas de sus soluciones y a continuación, daremos una tabla con todas las 92 que tiene.

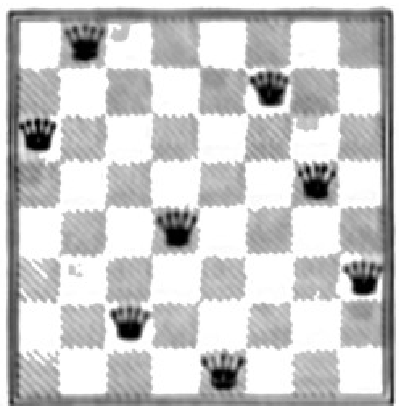


Figura 68

En la fig. 68 se da una de estas soluciones. Designémosla mediante ocho cifras

(6 8 2 4 1 7 5 3),

cada una de las cuales indica la posición de una reina en cada columna del tablero, o sea, 6 indica que la reina se encuentra en la primera columna, contando de izquierda a derecha, en la sexta casilla, contando de abajo arriba; 8, que la reina se halla en la segunda columna, en la octava casilla y así sucesivamente.

Figura 69

A continuación, llamaremos columnas a las filas verticales de casillas, y filas a las horizontales.

También numeraremos las filas con las cifras de 1 a 8 contando de abajo arriba. Así pues, la primera solución, escrita antes mediante un renglón de números, sería más correcto escribirla así:

(A)	filas	68241753
	columnas	12345678

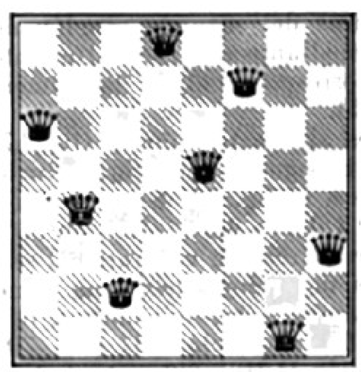


Figura 70

Si giramos al tablero en 90° en dirección contraria a las manecillas del reloj, entonces, de la primera solución obtendremos otra, correspondiente a ella, dada en la fig.69.

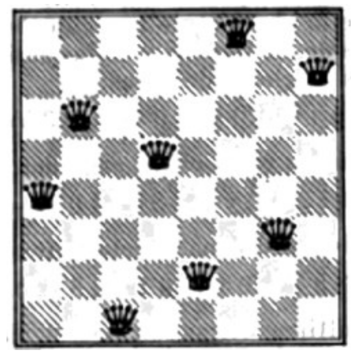


Figura 71

Para obtener esta solución correspondiente, mediante las cifras de la primera, basta con distribuir las columnas de la tabla (A) de tal forma que las cifras del primer renglón vayan en orden decreciente:

(B) 8 7 6 5 4 3 2 1
2 6 1 7 4 8 3 5

Las cifras del segundo renglón de la tabla, obtenida mediante este procedimiento, dan una solución correspondiente a la primera (B): (2 6 17 4 8 3 5).

Las figuras (figs. 70 y 71), representan la segunda y tercera soluciones correspondientes a la fig. 68. Ellas se pueden obtener girando al tablero del ajedrez en 90° y luego en otros 90° en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj. De forma semejante a la anterior, también se puede obtener la designación numérica de la posición III (fig. 70), deducida de la posición II (fig. 69), y la de la posición IV? (fig. 71), deducida de la posición III.

Pero es también posible obtener la posición III directamente de la I y la IV inmediatamente de la II. Para ello obramos de la siguiente forma. Las soluciones de las figs. 68 y 69 las designamos mediante los renglones de cifras:

(6 8 2 4 1 7 5 3) y (2 6 1 7 4 8 3 5).

Escribamos estas cifras en orden inverso:

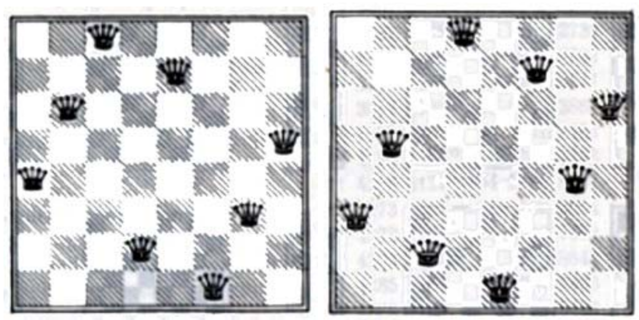
(3 5 7 1 4 2 8 6) y (5 3 8 4 7 1 6 2)

restando de 9 cada una de estas cifras, obtenemos

(6 4 2 8 5 7 1 3) y (4 6 1 5 2 8 3 7).

Estas últimas cifras son la designación numérica de las resoluciones en las figs. 70 y 71.

De tal forma, en el caso general, ciertas soluciones del problema sobre las reinas dan lugar para otras tres soluciones correspondientes.



Figuras 72 y 73

En la fig. 72 se da otra solución del problema. Su particularidad consiste en que de ella resulta sólo una solución correspondiente (fig. 73). En efecto, si giramos el tablero en 180° otra vez obtenernos la misma disposición. La fila de cifras (4 6 8 2 7 1 3 5) que representa esta solución, se diferencia en que sumándola con una fila, compuesta por las mismas cifras. pero escritas en orden inverso, da

(9 9 9 9 9 9 9 9).

Tomamos cualquier solución del problema sobre las ocho reinas y en nuestro dibujo invertimos el orden de las columnas del tablero, es decir, la octava pasará a ser la primera, la sétima pasará a ser la segunda y así sucesivamente.

O escribimos la designación numérica de esta solución en orden inverso, que de hecho es lo mismo y, de tal forma obtenemos una solución inversa a la dada. Es fácil comprobar que esta solución se diferencia de cualquier solución correspondiente.

Prescindiendo del procedimiento para el hallazgo de las soluciones más simples, demos estas soluciones en la fig. 74.

Cada una de las soluciones de I a IX da 4 correspondientes, como ya hemos explicado antes, y 4 inversas, o sea, soluciones en total 8; la última, XII, da solamente 4 soluciones.

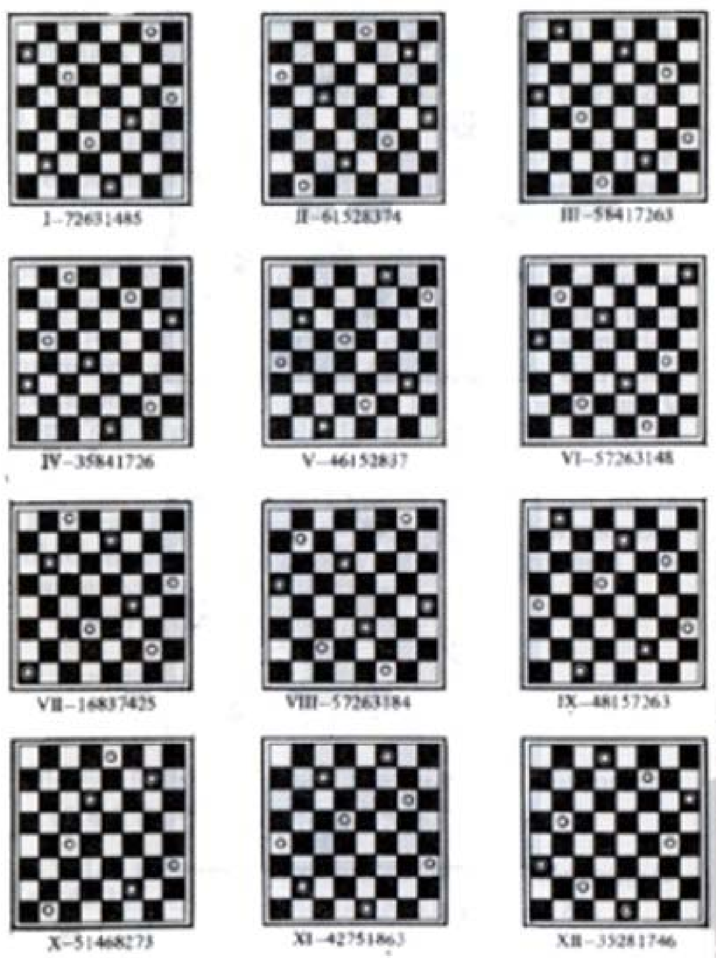


Figura 74

O sea, en total resultan 92, con las cuales se agotan todas las soluciones de este problema. La tabla de las 92 soluciones se da más abajo.

Tabla de todas las soluciones del problema sobre las ocho reinas

1	1568	3724	24	3681	5724	47	5146	8273	70	6318	5247
2	1683	7425	25	3682	4175	48	5184	2736	71	6357	1428
3	1746	8253	26	3728	5146	49	5186	3724	72	6358	1427
4	1758	2463	27	3728	6415	50	5246	8317	73	6372	4815
5	2468	3175	28	3847	1625	51	5247	3861	74	6372	8514
6	2571	3864	29	4158	2736	52	5261	7483	75	6374	1825
7	2574	1863	30	4158	6372	53	5281	4736	76	6415	8273
8	2617	4835	31	4258	6137	54	5316	8247	77	6428	5713
9	2683	1475	32	4273	6815	55	5317	2864	78	6471	3528
10	2736	8514	33	4273	6851	56	5384	7162	79	6471	8253
11	2758	1463	34	4275	1863	57	5713	8642	80	6824	1753
12	2861	3574	35	4285	7136	58	5714	2863	81	7138	6425
13	3175	8246	36	4286	1357	59	5724	8136	82	7241	8536
14	3528	1746	37	4615	2837	60	5726	3148	83	7263	1485
15	3528	6471	38	4682	7135	61	5726	3184	84	7316	8524
16	3571	4286	39	4683	1752	62	5741	3862	85	7382	5164
17	3584	1726	40	4718	5263	63	5841	3627	86	7425	8136
18	3625	8174	41	4738	2516	64	5841	7263	87	7428	6135
19	3627	1485	42	4752	6138	65	6152	8374	88	7531	6824
20	3627	5184	43	4753	1682	66	6271	3584	89	8241	7536
21	3641	8572	44	4813	6275	67	6271	4853	90	8253	1746
22	3642	8571	45	4815	7263	68	6317	5824	91	8316	2574
23	3681	4752	46	4853	1726	69	6318	4275	92	8413	6275

Tabla 74

El lector puede, por cuenta propia, componer una tabla con todas las soluciones, utilizando para ello un procedimiento sistemático muy simple. Primero deberá colocar una reina en la casilla más baja de la primera columna a la izquierda, después otra en la segunda columna, también lo más bajo posible, y así sucesivamente procurando siempre colocar cada reina en la siguiente columna lo más bajo posible que permite la reina situada a su izquierda. Cuando llega el momento en que en la siguiente columna ya no es posible colocar una reina, deberá subirse la reina de la columna anterior en una, dos, tres... casillas y continuar la distribución de las reinas restantes, ateniéndose siempre a la misma regla: subir las reinas ya colocadas solamente en el caso cuando a la derecha no hay sitio para ubicar la siguiente.

Cada solución hallada se escribe y, de tal forma, van sucediéndose unas a otras también en un orden numérico consecutivo. La tabla así obtenida se puede comprobar formulando las soluciones correspondientes e inversas, deducidas de las primeras.

158. El juego con un caballo del ajedrez

En este capítulo ya hemos tocado la cuestión de si puede o no un caballo de ajedrez recorrer una parte del tablero, pasando por todas las casillas una sola vez.

He aquí otro problema también antiguo sobre el juego con un caballo de ajedrez. Supongamos que en una de las casillas de un tablero de ajedrez se halla un caballo. Es preciso recorrer con él las restantes 12 casillas, pasando por cada una de ellas una sola vez. A primera vista no se ve incluso claro por dónde comenzar a resolver este problema. Pues, desde cada casilla inicial debe partir una ruta determinada jugadas. También es posible que para cierta cantidad de casillas; esa ruta no exista en general. A la solución de este problema se dedicó el matemático Euler. En una de sus cartas a Holbach (con fecha del 26 de abril de 1757) da una de las soluciones a dicho problema. He aquí lo que entre otras cosas escribe Euler en esa interesante carta:

"...El recuerdo sobre un problema que se me propuso en cierta ocasión, no hace mucho, me sirvió de motivo para realizar algunas investigaciones finas, en las cuales un análisis ordinario, según me parece, no tiene ninguna utilidad. La cuestión radica en lo siguiente. Es preciso recorrer con un caballo de ajedrez las 64 casillas del tablero, de tal forma que por cada una de ellas pase una sola vez. Con este fin, todas las casillas, por las que consecutivamente pasa el caballo durante las jugadas, se cubren con sellos. Pero a esto se añade una condición más, o sea, el comienzo de las jugadas debe realizarse desde una casilla determinada. Esta última condición según me parece, dificulta mucho la cuestión. No obstante, yo afirmo quo si el trayecto completo que recorre el caballo es regresivo, o sea, si el caballo puede pasar de la última casilla otra vez a la primera, entonces, se liquida también esta dificultad. Después de realizar algunas investigaciones sobre el tema, por fin, encontré un procedimiento claro para el hallazgo de cualquier cantidad de soluciones semejantes (su número, sin embargo, no es infinito) sin hacer pruebas. Una solución de estas se de en la fig. 75.

El caballo juega conforme el orden indicado por números. Puesto que de la última casilla 64 puede pasar a la 1, entonces, el trayecto completo que recorre es regresivo".

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Figura 75

Tal es la solución del problema sobre el juego con un caballo del ajedrez, dada por Euler. En su carta el ilustre científico no explica ni los métodos ni el camino que le condujeron a este descubrimiento. Brindamos a continuación algunos métodos distintos para la resolución de este problema, más simétricos y sistematizados.

I. Dividimos el tablero del ajedrez en dos partes: interior, compuesta por 16 casillas y exterior (fig. 76).

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	a'	b'	c'	d'	d	c
d	c	c'	d'	a'	b'	b	a
a	b	b'	a'	d'	c'	c	d
c	d	d'	c'	b'	a'	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

Figura 76

Cada 12 casillas de la parte exterior, marcadas con letras iguales, dan una de las rutas en zigzag del caballo del ajedrez por la parte exterior del tablero; de igual modo, cada cuatro casillas de la parte interior, con la misma marcación, dan una de las rutas cerradas del caballo en forma de cuadrado o rombo.

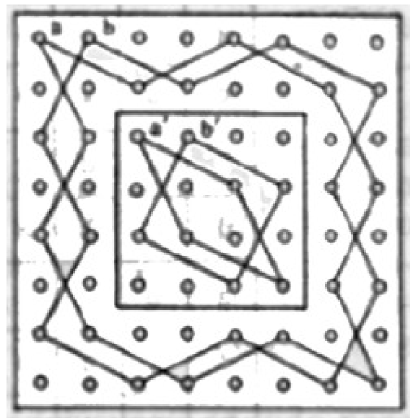


Figura 77

En la fig. 77 se dan dos rutas en zigzag por la parte exterior del tablero. Estas rutas están marcadas con las letras a y b. En la misma figura se dan dos rutas por la parte interior del tablero. Designamos estas rutas por a’ y b', conforme a las anotaciones en la fig. 76.

Terminada una de las rutas circulares por la parte exterior del tablero, el caballo puede pasar a cualquiera de las tres rutas interiores con otra designación. No es difícil, basta con tomar un tablero y un caballo, hallar, además por distintos procedimientos, cuatro rutas por 16 casillas, tales como por ejemplo

ab', bc', cd', da'.

Efectivamente, si observa con atención las figs. 76 y 77 o un tablero del ajedrez, verá que para proyectar una ruta del caballo por 16 casillas es preciso únicamente unir una ruta circular exterior de 12 casillas con una interior, pero con otra letra de designación, mediante una línea recta, destruyendo al mismo tiempo, en cada una de las rutas circulares L línea de cierre. De tal forma, obtendremos cuatro rutas circulares por 16 casillas. Estas cuatro rutas se pueden unir nuevamente de distintas formas con el fin de obtener la ruta completa del caballo por las 64 casillas del tablero.

Así, pues, se coloca un caballo en una casilla cualquiera, por ejemplo, de la parte exterior del tablero y desde ella el caballo recorre una ruta por 12 casillas; a continuación pasa a una de las tres rutas interiores con distinta designación, recorre esta ruta en cualquier dirección y pasa otra vez a la parte exterior, donde realiza el segundo recorrido en zigzag por 12 casillas, luego salta otra ves a una de las rutas interiores, con una designación diferente a la anterior, pasa por ella, salta de nuevo a una de las rutas exteriores y así sucesivamente, hasta que recorre las 64 casillas.
Este procedimiento para la resolución del problema, es tan simple y fácil que no necesita explicaciones más detalladas.

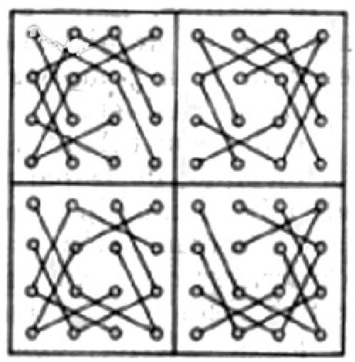


Figura 79

II. Este problema se puede resolver mediante otro procedimiento también fácil. En este caso, para mayor comodidad, el tablero se divide mediante dos líneas centrales en 4 partes con 16 carillas en cada una de ellas (fig. 78). Las 16 casillas de cada cuarta parte marcadas con letras iguales, se pueden unir mediante ley lados de dos cuadrados o dos rombos que no tengan ni un sólo vértice común (fig. 79). Uniendo a su vez, los cuadrados y rombos, con las mismas letras de designación, de todos los cuartos de tablero, se pueden obtener cuatro rutas circulares y regresivas de 16 casillas. Uniendo después estas rutas, obtenemos la ruta completa del caballo por las 64 casillas.
Es conveniente hacer también la siguiente observación. En cada cuarto de tablero, en forma de rombos y cuadrados, están marcadas cuatro rutas del caballo. Si unimos loe rombos y cuadrados, designados con iguales letras, de las cuatro partes del tablero obtenemos cuatro rutas regresivas de lo casillas cada una.

Ciertas dificultades pueden surgir cuando para obtener la ruta completa por las 64 casillas, comenzamos a unir entre sí las cuatro rutas de 16 casillas. En este caso es necesario tener en cuenta que la cadena (o fila de rutas) se puede modificar sin interrumpirla. Esto está basado en la siguiente regla.

Supongamos que tenemos una cadena cerrada de jugadas que pasan por las casillas A, B, C, D, E, F, G, H, f, J, H, L y que los extremos de esta cadena son A y L. Si, por ejemplo, la casilla D, diferente de la penúltima K, es halla a la distancia de una jugada del caballo de la última casilla L, entonces, DE se puede sustituir por DL y la cadena de jugadas se transforma en

A B C D L K J I H G F E,

o sea, la segunda mitad de la cadena será recorrida por el caballo en orden inverso.

Lo mismo resulta en el caso cuando una casilla cualquiera menos la segunda, se comunica mediante una jugada del caballo con la primera.

En conclusión, la cadena (o fila) de jugadas, se puede modificar sin interrumpirla.

La cantidad de rutas, por las cuales puede moverse el caballo dentro del tablero, determinadas por los procedimientos que acabamos de analizar, no es infinita, pero tan enorme que es difícil hacerse una idea sobre su magnitud.

Capítulo 14
Problemas combinatorios con cuadrados

En los cuatro problemas dados a continuación, nos dedicaremos a componer "cuadrados mágicos". Así se llaman unas tablas cuadradas de números, cuyas sumas de los números en cada fila, en cada columna y en cada una de las diagonales del cuadrado son iguales entre si.

159. Distribuir tres números

En cada una de las 9 casillas del cuadrado (fig. 80). escribir una de las cifras 1. 2, 3, de tal forma que la suma de las cifras escritas en cada fila, columna y en cualquier diagonal del cuadrado sea igual a 6. Hallar todas las variantes.

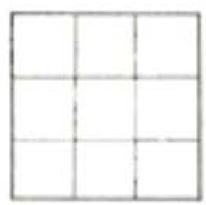


Figura 80

160. Distribuir 9 números

En un cuadrado, dividido en 9 casillas, distribuir las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de tal forma que las sumas de las cifras escritas en cada fila, columna y en cualquier diagonal del cuadrado sean iguales.

161. Distribuir 25 números

Distribuir 25 números, de 1 a 25, en un cuadrado de 25 casillas, de tal forma que en cada renglón, en cada columna y también en ambas diagonales del cuadrado se obtengan las mismas sumas.

162. Distribuir 16 números

En un cuadrado compuesto de 16 casillas, distribuir los números enteros de 1 a 16, de tal forma que las sumas de los números en cada fila, columna y también en cualquier diagonal del cuadrado sean iguales.

163. Distribuir cuatro letras

En un cuadrado, compuesto de 16 casillas, distribuir cuatro letras, de tal forma que en cada fila, columna y en las diagonales del cuadrado cada letra sea inscrita una sola vez. ¿Cuán grande es el número de soluciones de este problema con letras iguales y diferentes?

164. Distribuir 16 letras

En un cuadrado, compuesto de 16 casillas, distribuir 16 letras (cuatro letras a, cuatro b, cuatro c y cuatro d) de tal forma que en cada fila y en cada columna cualquiera de estas letras sean inscritas una sola vez.

Una pregunta semejante se puede formular para el caso de un cuadrado, compuesto de 25, 36 y, en el caso general, n^2 casillas. Una tabla cuadrada en la que cada fila es producto de la distribución de cierta cantidad de diferentes letras o cifras, y en la que las letras o cifras en
cada columna son también distintas, se llama cuadrado latino.

Estos cuadrados por primera vez fueron analizados por Euler en 1782. El término "latinos" está relacionado con el hecho que los elementos del cuadrado se designan con letras latinas a, b, c,... La cantidad de diferentes cuadrados latinos de n^2 casillas crece con mucha rapidez a medida que crece el número n. Acordemos designar por k! el producto de la multiplicación de todos los números enteros de 1 a k, k! = 1 x 2 x 3 x....x k.

Es sabido que existen no menos de n! x (n-1)!... x 2! x 1! cuadrados latinos con dimensiones; de n x n. El valor exacto de esta expresión es conocido solamente para n pequeños.

165. Distribuir 16 oficiales

En cada uno de cuatro regimientos fueron elegidos cuatro oficiales de distinto grado (coronel, mayor, capitán y teniente). Es preciso distribuir estos dieciséis oficiales en un cuadrado, de tal forma que en cada fila y en cada columna haya un oficial de cada grado y un representante de cada regimiento.

166. Una partida de ajedrez

En una partida de ajedrez se encuentran dos equipos, cada uno de cuatro personas. Cada participante debe jugar una partida con cada jugador del equipo adversario. Es preciso elaborar el gráfico del concurso de tal forma que:

1. cada ajedrecista juegue dos partidas con las figuras blancas y dos con las negras;
2. en cada serie de partidas cada equipo juegue dos partidas con figuras blancas y dos con negras.

Se pueden proponer problemas semejantes a los dos últimos para cualquier número n de oficiales y regimientos y para equipos con cualquier cantidad de participantes. Es fácil ver que siendo n = 2 el primer problema no tiene solución. Es imposible distribuir cuatro oficiales de dos grados y de dos regimientos, conforme exigen las condiciones del problema. En 1782 Euler suponía que este problema era irresoluble siendo n=2, 6, 10, 14,..., es decir, con todos los valores de n, cuya división por 4 da un resto de 2. Esta deducción fue confirmada en 1900 para n = 6. Y, por último, en 1959 fue determinado que en todos los casos cuando n distinto de 2 y 6, este problema tiene solución. Resultó que siendo n>6 la suposición de Euler no es justa. Euler se equivocó.

Capítulo 15
La geometría de los viejos

167. Sobre una araña y una mosca

En el ángulo C del techo de un local (fig. 81) se encuentra una araña y en el suelo en el ángulo opuesto K, duerme una mosca.

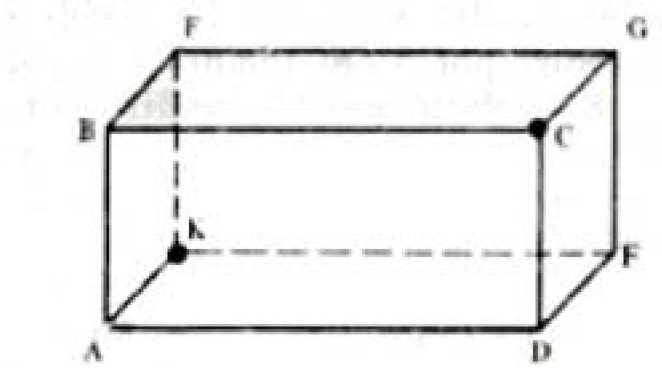


Figura 81

¿Cuál es el trayecto que debe recorrer la araña para llegar donde la mosca por la distancia más corta?

Puentes e islas

¿Ha vivido o vive usted actualmente en alguna ciudad o lugar por donde pasa un río con afluentes y brazos que forman islas? Posiblemente que el río, sus afluentes y brazos sean cruzados por puentes que unen distintas partes de la ciudad. En Leningrado, por ejemplo, el río Nevá tiene gran cantidad de afluentes, brazos y canales cruzados por multitud de puentes y pasos. ¿Ha pensado alguna vez (claro está, si vive en un lugar por donde pasa un río con islas y puentes) de dar un paseo por todos esos puentes pero de tal forma que pase una sola vez por cada uno de ellos? Es dudoso que haya pensado en ello y sin embargo nos encontramos ante un problema sumamente interesante e importante, formulado por primera vez por el famoso matemático Euler.

La parte instructiva de los problemas que proponemos a continuación, consiste en investigar si es posible o no la solución del problema dado, antes de comenzar a resolverlo. Euler, en particular, analizó detalladamente el caso cuando es imposible.

168. El problema de Euler

El problema, propuesto por Euler en 1759 consiste en lo siguiente.

Un río, que rodea una isla, se divide en dos brazos, cruzados por siete puentes: a, b, c, d, e, f, g (fig. 82).

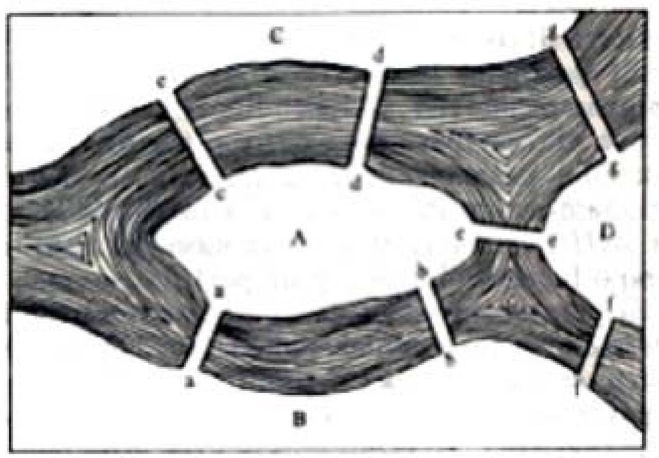


Figura 82

¿Será posible realizar un paseo durante el cual se pase por todos los puentes una sola vez sin pasar por ninguno de ellos dos o más veces?

- ¡Eso es posible sin duda! - dirá uno. - ¡No, eso es imposible! - responderá otro. Pero... ¿cómo demostrar quién de los dos tiene razón?

El camino más fácil para la solución de este problema puede parecer el siguiente: se efectúan todas las pruebas posibles de paso por los puentes, o sea, se enumeran todas las rutas posibles y después se examina cual o cuales de ellas satisfacen las condiciones formuladas en la pregunta. Pero, está claro que, incluso en el caso de sólo siete puentes, será preciso realizar una cantidad excesiva de pruebas. O sea, con el aumento de la cantidad de puentes este procedimiento, para la solución práctica del problema, es absolutamente increíble. Además, incluso siendo la cantidad de puentes invariable, el problema varía conforme a la situación de loe puentes. Por lo tanto, escogeremos otro camino más seguro para la solución de este problema.

Antes de todo investigamos si es posible o no realizar el recorrido por los siete puentes, dada su situación, observando las condiciones determinadas. Para facilitar la investigación introducimos las siguientes designaciones convencionales.

Tomamos por A, B, C y D las distintas partes de tierra dividida por los brazos del río (fig. 82) El paso del territorio A al territorio B lo designamos por AB, independientemente al puente por el que pasamos, por a o por b. Si a continuación pasamos de B a D, este trayecto lo designamos por BD y todo el camino de A a D por ABD, es decir, B, en este caso, es al mismo tiempo lugar de llegada y de partida.

Si pasamos después de D a C, todo el camino recorrido lo designamos por ABDC. Esta designación de cuatro letras significa que del lugar pasando por B y D y por tres puentes, llegamos a C.

De tal forma, si pasamos después el cuarto puente, para designar el trayecto recorrido necesitaremos cinco letras. Después de pasar el quinto puente tendremos que designar el trayecto recorrido con seis letras y así sucesivamente. En una palabra, si pasamos una vez por los siete puentes, el camino recorrido debe designarse con ocho letras (en general, si tenemos n puentes, para designar la ruta que buscamos, usando por estos puentes, necesitaremos n+1 letras).

¿Pero cómo y en que orden deben ir las letras en esta designación?

Entre las orillas de A y B hay dos puentes. Entonces, la sucesión de las letras AB o BA tiene que figurar dos veces. Exactamente lo mismo debería repetirse dos veces la contigüidad de las letras A y C (entre estos territorios también hay dos puentes). Después, por una vez debe haber contigüidad entre las letras A y D, B y D, D y C.

Por consiguiente, si el problema expuesto tiene solución, es decir, si es posible pasar los puentes así como lo exigen las condiciones del problema, entonces es necesario:

1. que toda la ruta se designe mediante ocho letras;
2. que en la distribución de dichas letras se observen las condiciones indicadas con referencia a la contigüidad y repetición de las mismas.

Examinemos ahora una circunstancia sumamente importante.

Tomamos, por ejemplo, el territorio A, unido con otros territorios mediante varios puentes: a, b, c,... (en el caso dado mediante cinco puentes).

Si pasamos el puente a (indiferentemente desde donde; desde A o desde B) en la designación del trayecto recorrido la letra A aparecerá una vez. Supongamos que el caminante pasó 8 puentes a, b y c, que conducen a A. Entonces, en la designación de este trayecto la letra A aparecerá dos veces, lo que no es difícil comprobar. Si al territorio A conducen 5 puentes, entonces, en la designación del trayecto, a través de dichos puentes, la letra A figurará 8 veces. En general, es fácil ver que el número de puentes que conducen a A es impar, para determinar cuantas veces en la designación del trayecto se repite la letra A, es necesario añadir a dicho número impar de puentes una unidad y dividir la suma obtenida por dos. Esta regla también es justa para cualquier otro territorio con un número impar de puentes que, para abreviar, llamaremos a continuación territorio impar.

Una vez asimiladas las condiciones expuestas, podemos proceder a la investigación final del problema de Euler.

Al territorio A conducen cinco puentes. A cada uno de los territorios B, C y D conducen tres puentes. Entonces, todos estos territorios son impares, por lo tanto, teniendo en cuenta lo dicho, en la designación completa del trayecto recorrido a través de todos los siete puentes es preciso que:

- la letra A figura (5 + 1)/2, o sea 3 veces;
- la letra B figura (3 + 1)/2, o sea 2 veces
- la letra C figura (3 + 1)/2, o sea 2 veces;
- la letra D figura (3 + 1)/2, o sea 2 veces;
- En total 9 letras.

De tal forma, resulta que en la designación de la ruta que buscamos tienen que figurar, obligatoriamente, 9 letras. Pero antes hemos ya demostrado que si el problema tiene solución, todo el trayecto debe designarse sólo con ocho letras. De ello se desprende que, con la distribución dada de los siete puentes, este problema es irresoluble.

¿Significa esto que el problema sobre el paso no repetido por ciertos puentes es siempre irresoluble, cuando tenemos una isla, dos brazos y siete puentes? Claro que no. Hemos demostrado únicamente que el problema es irresoluble para una situación dada de los puentes. Con otra ubicación de dichos puentes la solución puede ser otra.

Notemos ahora que para todos los usos cuando la cantidad de puentes que conducen a distintos territorios es impar, las reflexiones que debe hacerse pueden ser absolutamente análogas a las anteriores y, de tal forma, determinar la posibilidad o imposibilidad de resolución del problema.

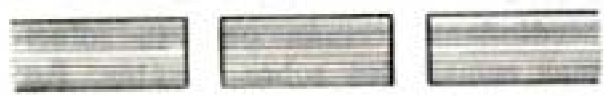


Figura 83

Con el fin de pasar a resolver un problema más generalizado, deberemos antes examinar el caso cuando la cantidad de puentes, que conducen de un lugar a otro, es par.

Supongamos, por ejemplo, que desde el territorio A cruzan el río una cantidad par de puentes. Entonces, para marcar la ruta que pase por todos los puentes una sola vez, es preciso aclarar dos variantes: 1) la ruta comienza desde A; 2) la ruta comienza desde otro territorio.

En efecto, si desde A a B conducen, por ejemplo, dos puentes (fig. 83), entonces el caminante partiendo desde A y pasando una vez por cada puente, debe señalar su camino así: ABA, o sea, la letra A se repite dos veces. Si es que el caminante pasa por los mismos puentes, pero desde B, entonces, la letra A aparecerá una sola vez, ya que este trayecto se designa por BAB.

Supongamos ahora que a A conducen cuatro puentes (de un territorio o de varios, es lo mismo) y que el caminante parte de A con intención de pasar por todos los puentes una vez. En este caso también es fácil ver que en la designación del trayecto recorrido la letra A se repite tres veces; pero si se emprende el camino desde otro lugar, la letra A se repetirá sólo dos veces. Exactamente lo mismo resultará en el caso de seis puentes. La letra A, en la designación de toda la ruta, se repetirá cuatro o tres veces conforme al lugar de partida: desde A o desde otro lugar. De lo expuesto se desprende la siguiente regla:

> *Si la cantidad de puentes en un territorio conocido es par (territorio par) entonces, si la ruta comienza desde otro territorio, en la designación de esta ruta la letra que determina el territorio par se repetirá una cantidad de veces igual a la mitad de la cantidad de puentes.*

Si la ruta comienza desde el mismo territorio par, entonces, la cantidad de veces que se repite dicha letra será igual a la mitad de la cantidad de puentes menos uno. En cualquier caso, la cantidad de veces que aparece la letra que representa el territorio par, será no inferior a la mitad del número de puentes situados en este territorio.

Las reflexiones anteriores permiten deducir un procedimiento común para la solución de problemas semejantes sobre puentes. En cualquier caso podemos simultáneamente determinar si el problema tiene o no solución. Obramos de la siguiente forma:

1. Determinamos la cantidad total de puentes y la ponemos a la cabeza de la solución.

2. Designamos los diferentes territorios, divididos por el río, mediante las letras A, B, C, D... y las escribimos en columna, una debajo de la otra.

3. Enfrente de la letra de cada territorio escribimos, en una segunda columna, la cantidad de puentes que parten de ese territorio. Para el caso sobre el problema de siete puentes, antes examinado por nosotros, tendremos el siguiente esquema de resolución:

Cantidad de puentes 7

A 5

B 3

C 3

D 3

Observamos que la suma de las cifras de la segunda columna siempre será exactamente igual a la cantidad duplicada de los puentes. Esto es debido a que en cada puente contamos sus dos extremos, que permanecen en diferentes orillas. Además, si en el problema se dan territorios impares, entonces la cantidad de éstos es par, ya que de lo contrario la suma de las cifras de la segunda columna no daré un número par.

4. Agregamos una tercera columna, escribiendo en ella las mitades de los números pares de la segunda y en el caso de haber en esta última, números impares, añadimos a ellos una unidad y escribimos en la tercera columna la mitad del número obtenido. (Cada número en la tercera columna no es superior a la cantidad de repeticiones de la letra correspondiente en la designación de la ruta).

5) Hallamos la suma de la tercera columna. Para el problema analizado tenemos:

Cantidad de puentes 7

A 5 3

B 3 2

C 3 2

D 3 2

Total 9

De lo expuesto se deduce que la suma de la tercera columna siempre es superior a la mitad de la suma de la segunda columna (o sea, a la cantidad de puentes) en una mitad de la cantidad de territorios impares. Por otra parte, la suma de la tercera columna no es superior a la suma de las cantidades de repeticiones de todas las letras, o esa, a la cantidad de letras que designan todo el trayecto (ésta es igual a

la cantidad de puentes más 1). De tal forma, si el problema tiene solución, la mitad de la cantidad de territorios impares no debe superar la unidad.
Hemos establecido, para el caso general, que al el problema es resoluble, entonces,

1. todos los territorios son pares, o
2. hay solamente dos territorios impares.

A continuación veremos que en estos casos el problema, sobre el paso por los puentes una sola vez, siempre tiene solución y que en último caso la ruta debe comenzar desde uno de los territorios impares.

169. El peso por 15 puentes

Resolver ahora el problema, en el que cuatro islas están unidas entro si y con las orillas del río mediante 15 puentes, conforme se muestra en el dibujo dado (fig. 84).

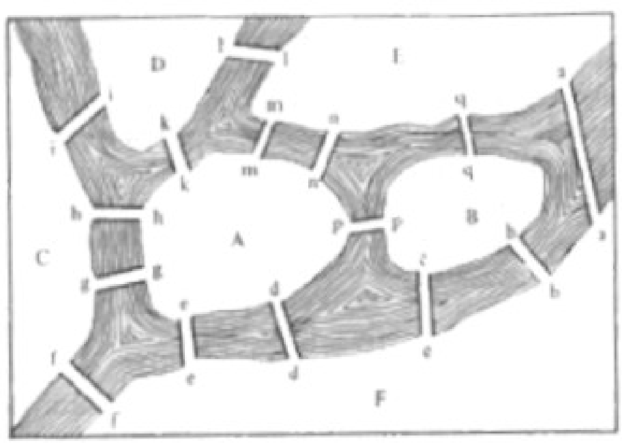


Figura 84

¿Será posible en un recorrido parar por todos los puentes, no haciéndolo por ninguno de ellos más de una vez?
Continuemos los razonamientos enunciados para formular el problema 169. Antes hemos establecido las condiciones, cuya ausencia hacen imposible el paso por los puentes. ¿Pero, es siempre posible pasar por los puentes, utilizando el procedimiento necesario, si estas condiciones se observan?

Vamos a demostrar que si todos los territorios son pares, entonces, existe una ruta cerrada (que finaliza en el territorio en que ella comenzó) que pasa por cada puente una sola vez. Dibujar en un pliego de papel cualquier sistema de islas y puentes entre ellas, pero de tal forma que a cada territorio conduzca un número de puentes. Tomamos por longitud de la ruta la cantidad de puentes por los que ésta pasa. Además la longitud de la ruta, conforme a la solución del problema 189, es igual a 15. Entre todas las rutas, que pueden ser determinadas por estos territorios, observando las condiciones del problema, elegimos la más larga y la designamos por abc... g (donde las letras a, b, c..., g representan los puentes que cruza la ruta).

Demostremos que: 1) esta ruta es cerrada y, 2) pasa por todos los puentes.

Designamos por A el territorio en que comienza la ruta y suponemos que ésta finaliza en el territorio G distinto de A. Si es que la ruta pasó ya antes por G, digamos r veces, entonces, para caminar de nuevo por él, la cantidad de puentes ya pasados, que conducen a G tiene que ser 2r. En cuanto el territorio G es par, entonces, entrando en él por el puente g, tendremos que hallar otro puente h, para salir de G, que sea diferente de los 2r puentes ya pasados y del puente g. Esto significa que podemos continuar caminando en contradicción con el hecho que la ruta elegida tiene máxima longitud. O sea, la ruta abc...g finaliza en el territorio A del cual comienza, por lo tanto, es cerrada. Demostremos a continuación que dicha ruta pasa por cada puente. Supongamos que no pasa por cierto puente f (véase la fig. 85).

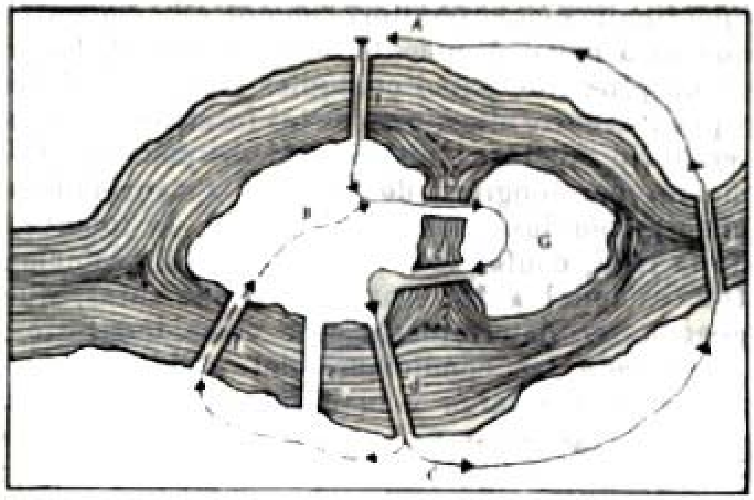


Figura 85

Es obvio que f se puede elegir de tal forma que por uno de los territorios que uno pase la ruta abc...g. Para que esté más claro, suponemos que f conduce al territorio B del cual salen los puentes a, b. Entonces, la ruta fbc...ga tiene una longitud en una unidad más larga que abc ... g. Pero por abc...g hemos designado la ruta más larga que se puede trazar por estos territorios. La contradicción que surge demuestra que la ruta abc...g pasa por todos los puebles.

Así por ejemplo, el problema 168 se podría resolver si fuese preciso pasar por todos los puentes dos veces, lo que, en efecto, se reduce a la duplicación, de la cantidad de puentes, o esa, a la transformación de todos loe territorios en pares.

Demostremos ahora que la ruta exigida existe también para el segundo caso, cuando tenemos solamente dos territorios impares, digamos, A y B. Construimos un puente nuevo a, que une A con B.

Entonces, todos los territorios se transforman en pares y, conforme a lo antes demostrado, existe una ruta que pasa por todos los puentes una vez. Esta ruta es cerrada, por consiguiente, puede comenzar desde cualquier puente, por ejemplo, desde el puente a: abc…g. Es fácil ver que la ruta bc... g, cuyos extremos yacen en los territorios impares A y B, resuelve nuestro problema.

Analizando el problema y hechas las deducciones precisas sobre su resolución, nos queda, por último, realizar el paso por los puentes.

Pero esto es ya una parte del problema relativamente fácil. Máxime que nuestras, demostraciones contienen el procedimiento para el hallazgo de la ruta necesaria.

170. El viaje de un contrabandista

El problema sobre el paso por puentes se puede proponer de distintas formas. Por ejemplo, como el viaje de un contrabandista, que decidió pasar por todos los países de Europa, cruzando la frontera de cada uno de ellos una de sola vez.

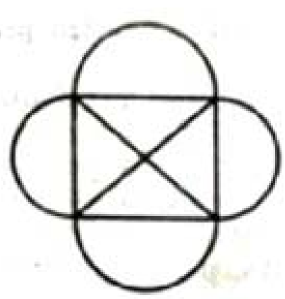
En este caso, es lógico que los diferentes países y sus fronteras corresponden a diferentes territorios y ríos, cada uno cruzado por un puente (cada frontera común entre dos países).

171. Sobre las figuras trazadas de una plumada

Es conocida una anécdota: alguien daba un millón de rublos a cada uno que construyese la figura 86, pero observando una condición. La figura tenía que ser construida de una plumada ininterrumpida, o sea, no apartando la pluma o lápiz del papel y no duplicando ni una sola línea, es decir, por una línea ya trazada no se podía pasar por segunda vez.

La ilusión de ser "millonario", resolviendo un problema tan fácil, debió conducir a muchos a estropear mucho papel y gastar mucho tiempo en intentos de construir esta figura de una sola plumada, conforme se exigía. No obstante, este problema no tiene solución y esto es tanto más desagradable por el simple hecho que no se resuelve por un poquito.

De ninguna forma se consigue trazar una sola, "la última", línea, cualquiera que sea. Se consigue incluso descubrir el secreto de que toda la dificultad consiste en trazar primero una figura más simple, como lo es un cuadrilátero con dos diagonales (fig. 87). ¡E incluso esta figura, que parece ser mucho mas fácil, de ninguna forma se consigue construir!



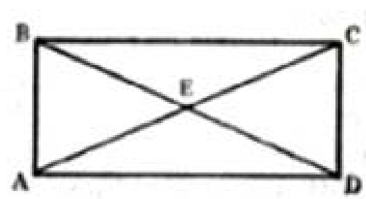
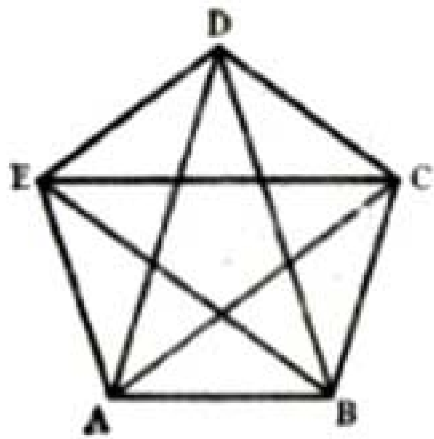


Figura 86 y 87

Dudas acerca de la irresolución de esto problema, de todas las formas, quedan, tanto más que figuras mucho más complicadas y difíciles a la vista se construyen con facilidad de una plumada. Así, por ejemplo, un pentágono con todas sus diagonales se puede construir con facilidad de una plumada ininterrumpida sin hacer repeticiones, resultando un dibujo como el representado en la fig. 88.



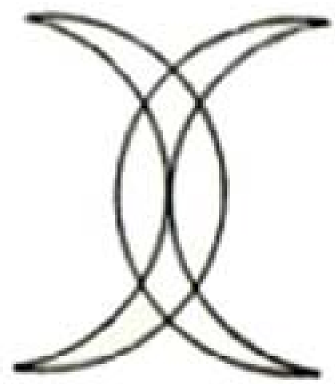


Figura 88 y 89

Con la misma facilidad se pueden construir polígonos con un número impar de lados, pero de ningún modo se consigue trazar un cuadrado, un hexágono, etc., en general, polígonos con un número par de lados.

Ahora no tendremos ya dificultad para determinar y mostrar cuáles son las figuras, entre cualesquiera dadas, que se pueden construir de una plumada, sin repetir líneas y cuáles no.

Cada problema de este género se puede reducir al ya analizado por nosotros, o sea, del problema de Euler sobre los puentes.

En efecto, tomamos como ejemplo el cuadrilátero ABCD con sus dos diagonales que se cruzan en E. (fig. 87). ¿Se puede construir esta figura de una plumada sin repetir líneas?

Consideramos loa puntos A, B, C, D y F. como centros de ciertos territorios, divididos por un río y las líneas, que unen estos puntos, como puentes que conducen a estos territorios. ¿Qué tenemos en este caso? Cinco territorios, de los cuales cuatro son impares y uno par. Sabemos que, en este caso no se puede de una vez, pasar por todos los puentes, sin pasar dos veces por alguno de ellos o, dicho de otra forma, no se puede pasar por todos los puntos dados, trazando una línea ininterrumpida, sin repetir el camino ya una vez transitado.

Los casos cuando se puede o no se puede construir una figura de una plumada son exactamente los mismos que en los problemas sobre los puentes. En esencia, un problema se reduce a otro. Cualquier polígono impar con todas sus diagonales se puedo construir de una plumada sin repetir líneas, pues este caso corresponde al problema sobre los puentes, cuando todos los territorios son pares.

Las reflexiones aquí expuestas, son válidas para cualquier figura, independientemente de cómo fue construida: con líneas rectas o curvas, en un plano o en espacio. Pues no es difícil ver que se pueden trazar, con un solo movimiento ininterrumpido, todas las aristas de un octaedro regular y que es imposible hacerlo con respecto a los cuatro restantes cuerpos convexos regulares.

Dicen que Mahoma en lugar de firmar (era analfabeto) trazaba de una plumada las dos medias lunas, signo representado en la fig. 89. Y esto es comprensible puesto que, en el caso dado, tenemos solamente puntos de orden par y, por consiguiente, trazar una figura de una plumada sin repetir las mismas líneas siempre es posible.

También es siempre posible trazar de una plumada una figura en la que, además de los puntos de orden par, hay dos puntos (no más) de orden impar.

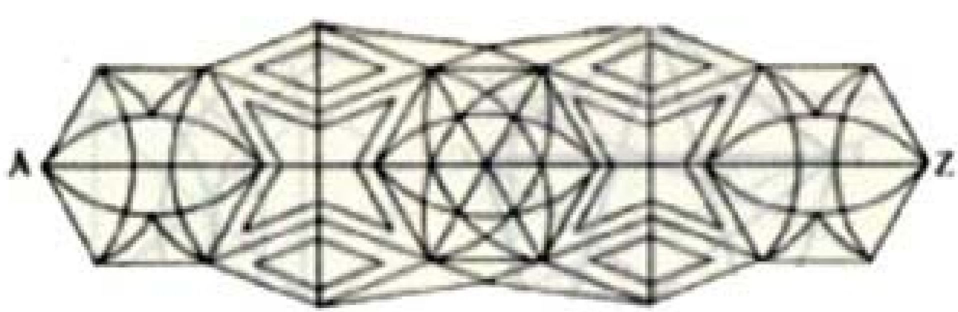
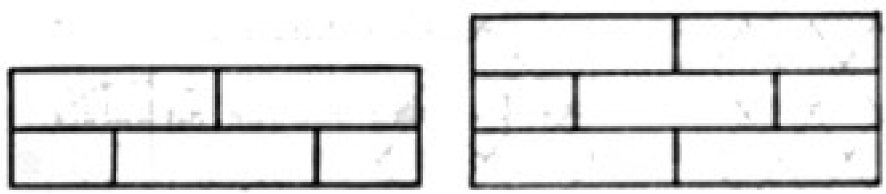


Figura 90

Un ejemplar muy bonito y enredado de esta clase de figuras, con dos puntos impares A y Z, se muestra es la fig. 90. La construcción de esta figura, lo mismo que en el caso del problema sobre los puentes debe comenzarse desde uno de estos puntos.

No es pueden construir de una plumada las figuras 91 y 92, no obstante la aparente simplicidad de ellas, ya que la primera tiene ocho y la segunda doce puntos de orden impar.



Figuras 91 y 92

La primera puede ser construida con no menos de cuatro y la segunda con no menos de seis líneas ininterrumpidas.

Ejemplos semejantes a estos, se pueden encontrar cuantos es quiera.

Para ejercitarse, proponemos al lector, en momentos de ocio, construir de una plumada los dibujos dados en la fig. 93.

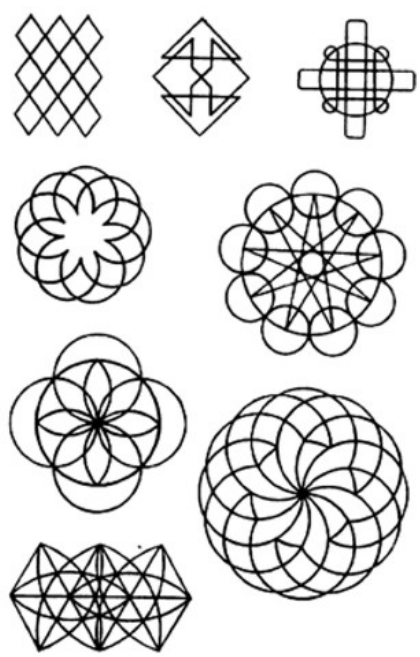


Figura 93

172. En un taller

En un taller se han instalado 10 tornos diferentes. Es sabido que cada uno de los 10 obreros de este taller puede trabajar solamente en dos tornos y que en cada torno pueden trabajar sólo dos obreros. ¿Será posible distribuir los obreros por tornos de tal forma que a cada uno le toque un torno en el que puede trabajar?

Capítulo 16
Laberintos

El origen de los problemas sobre laberintos se refiere a tiempos antiquísimos y se pierde en las tinieblas de leyendas legendarias. Los antiguos y quizás algunos en nuestros tiempos, consideraban que los problemas sobre laberintos, en general, eran irresolubles. La persona que entraba en un laberinto no podía ya salir de él, de no ser que sucediese un milagro o que una casualidad lo ayudase.

Leyendo este capitulo veremos, por el contrario, que laberintos sin salida no existen, que orientarse y encontrar salida del laberinto mis enredado no supone gran esfuerzo. Anticipamos la resolución de estos problemas con una nota histórica sobre los laberintos.

La palabra laberinto es de procedencia griega y significa pasos subterráneos. Efectivamente, existen multitudes de cuevas naturales subterráneas con una cantidad tan enorme de corredores, rincones y callejones sin salida, cruzados en todas las direcciones, que no es difícil perderse en ellos, extraviarse y, al no encontrar la salida, morir de hambre y sed.

Ejemplos de laberintos de esta clase, pero ya artificiales, pueden ser muchas ruinas de ciertos yacimientos, o las llamadas "catacumbas".

Lo más probable es que estas cuevas subterráneas excitaron, ya en los arquitectos antiguos, el deseo de edificar algo semejante a ellas. Por eso, en algunas obras de escritores antiguos (por ejemplo, egipcios) encontramos referencias a la existencia de laberintos artificiales. Por último, la palabra "laberinto", precisamente con mayor frecuencia se refería a edificios artificiales sumamente complicados, con multitud de paseos o galerías, infinidad de ramificaciones, cruces y pasos sin salida, que obligaban el que entrase a errar inútilmente es busca de una salida. Sobre la construcción de estos laberintos se componían leyendas.

La más conocida es la leyenda sobre el laberinto, construido el mítico Dédalo en la isla de Creta para el mítico rey Minos. En el centro del laberinto vivía el monstruo Minotauro y nadie que entrase en ese laberinto podía salir de él; al fin y al cabo era víctima del monstruo. Siete mozos y siete mozas daban de tributo cada año los atenienses al monstruo, que los devoraba sin piedad. Por fin Teseo, no sólo mató al

Minotauro, sino que consiguió salir del laberinto, sin extraviarse en él, orientándose por el hilo de un ovillo que le dio la princesa Ariadna. Desde entonces la expresión "el hilo de Ariadna" posee un significado simbólico como medio que permite salir de las situaciones más difíciles.

Los laberintos tienen diversidad de formas y composición. Hasta nuestros días se han conservado galerías intrincadas y complejas, caminos por cuevas, laberintos arquitectónicos sobre sepulturas, planes sinuosos en las paredes o pisos, marcados con mármol de color o con tejas, senderos tortuosos en el terreno y sinuosidades en el relieve de las rocas.

Con dibujos de laberintos se adornaban las vestiduras de los emperadores cristianos hasta el siglo IX y restos de esta clase de adornos se conservan hasta hoy día en las iglesias y catedrales de aquellos tiempos. Es posible que estos adornos simbolizasen la complejidad del camino de la vida y de los extravíos del hombre. Sobre todo se practicaban mucho los laberintos en la primera mitad del siglo XII. En la Francia de aquellos tiempos, los laberintos se construían de piedra o se representaban en el piso de iglesias y catedrales. Con mayor frecuencia eran llamados "camino a Jerusalén" y simbolizaban el difícil camino terrenal hacia los "lugares santos", recompensado con la felicidad celestial, por eso, el centro de los laberintos con frecuencia se denominaba "cielo".

En Inglaterra no se encuentran laberintos en los suelos de las iglesias, pero sí había muchos en praderas hechos con césped. Estos laberintos llevaban distintos nombres: "Ciudad de Troya", "Huella del pastor", etc. Laberintos como estos menciona Shakespeare en sus obras "Sueño de una noche de verano" y "La Tormenta".

Todos estos laberintos poseen más bien interés histórico que matemático. Desenredarlos no es difícil. Con el transcurso del tiempo estas figuras perdieron su significación simbólica y poco a poco se convirtieron en objeto de distracción. Los laberintos pasan a jardines y por donde, mediante sendas sinuosas que se cruzan, separan, ramifican o terminan inesperadamente, se obtienen figuras muy enredadas, en las que efectivamente, no es fácil encontrar el camino del borde al centro y en las que no es difícil perderse.

La nota histórica dada nos demuestra cuán viejo es el tema sobre los laberintos y a cuántas personas interesó él en sus tiempos. Los hombres se esmeraban en inventar los laberintos más complicados, "sin salida". ¿Pero acaso es posible construir realmente e incluso solamente dibujar, un laberinto sin salida, es decir, en el hecho de encontrar el camino hacia el centro y el camino de regreso hacia la salida fuera exclusivamente cuestión de suerte, casualidad o fortuna y no producto de un cálculo matemático determinado y correcto?

La resolución de estos problemas pertenece a tiempos relativamente posteriores y su comienzo fue puesto por el famoso Euler. Los resultados de las investigaciones condujeron a la deducción de que no hay laberintos sin salida.

La solución para cada laberinto puede ser hallada y además mediante procedimientos relativamente fáciles. A continuación, un lector atento se convencerá por su cuenta de lo dicho.

Planteamiento geométrico del problema sobre los laberintos.

Los paseos, senderos, corredores, galerías, pozos, etc. de los laberintos se extienden doblándose hacia un lado u otro; se cruzan y separan en todas las direcciones posibles; se ramifican, cierran, etc. Pero nosotros, para que sea más fácil su examen, vamos a marcar todos los cruces mediante simples puntos y considerar todos los pasos, senderos, corredores, como líneas, lo mismo sea rectas, trazadas en planos o no, ya que estas líneas unen nuestros puntos (cruces).

Estos puntos y líneas en conjunto componen una red geométrica o laberinto si cualquier punto, moviéndose por las líneas de esta red, puede llegar a cualquier otro punto sin apartarse de las líneas de nuestro sistema (o red).

Aceptando lo dicho, demostraremos que un punto semejante en movimiento (que representa, por ejemplo, a una persona) puede sucesivamente circunscribir todas las líneas de la red sin ninguna clase de saltos e interrupciones y, al mismo tiempo, pasar por cada línea de esta red exactamente dos veces. Claro está que dicho punto también pasará por el punto que representa la salida del laberinto.

La posibilidad de hacer este recorrido se deduce de que la figura, obtenida de una red mediante la duplicación de todas las líneas, se puede circunscribir de una plumada (véalo el problema 171). No obstante, esto está relacionado con dificultades complementarias, pues el que vaga por el laberinto no posee su plano y no solamente el territorio que se encuentra cerca de él. Demostraremos a continuación que incluso con estas limitaciones el recorrido del laberinto puede efectuarse.

Pero antes de proceder a la demostración de lo dicho, les proponemos una distracción matemática bastante interesante, que servirá de ayuda en la aclaración de todo lo expuesto y que será sumamente útil para asimilar la propia demostración. En una hoja de papel blanco marque arbitrariamente varios puntos y únales de dos en dos, tantas veces cuantas desee, mediante una cantidad indeterminada de líneas rectas o curvas, pero de tal forma que ni un sólo punto de este sistema quede absolutamente aislado. Así, pues, obtendrá lo que antes hemos denominado red geométrica.

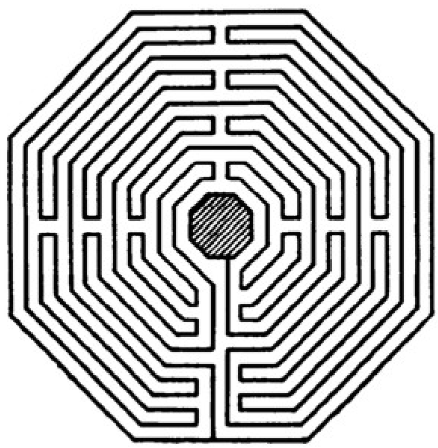


Figura 93 a. Laberinto formado de piedras en el piso del templo de San Quintín en Francia. La entrada es por abajo por la línea vertical.

Figura 93b. Laberinto en la catedral de Chartres, Francia

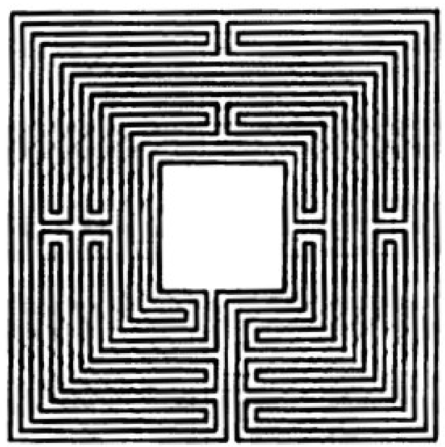


Figura 93c. Laberinto "de hierbas" (de 33 a 34 m de diámetro) que existió hasta el año 1797 en Inglaterra, en el condado de Essex

También puede dibujar, por ejemplo, la red do tranvías o autobuses de su ciudad, la red ferroviaria del país, de los ríos y canales, etc., si lo desea, puede añadir las líneas de las fronteras con otros estados. De nuevo obtendrá una red geométrica o laberinto (para comenzar es mejor construir una red no muy complicada).

A continuación, en un trozo de papel no transparente o cartón practique un agujero pequeño, por el cual se observe sólo una pequeña parte de la red o laberinto compuesta por usted. Después dirija el ocular (agujero para el ojo) de su "pantalla" a cualquier punto de intersección en su red, al que denominaremos A, o plantéese la siguiente tarea: pasar con el ocular, ininterrumpidamente, por todas las líneas de la red dos veces (hacia adelante y hacia atrás) y regresar al punto A. Para recordar las líneas ya pasadas con el ocular, en cada una de ellas trace una rayita transversal a la entrada en el cruce y otra a la salida de ella. De tal forma, los dos extremos de cada trayecto, de un cruce a otro (de punto a punto) después de cumplir la tarea (pasar por cada línea de la red dos veces) deberán estar marcados con dos rayitas transversales, pero no más.

Si es que el caso se refiere a un laberinto real, a las galerías de una mina o a las ramificaciones de una cueva, etc., entonces, el que vaga por ellas, en lugar de rayitas en el papel tendrá que hacer otra clase de señales para poder orientarse; por ejemplo, colocar una piedra a la entrada y salida de cada cruce, o sea, en la galería que abandona y en la que entra.

Pero, volvamos a la demostración de la afirmación antes hecha que cualquier laberinto tiene solución, que no hay laberintos "sin salida". En otras palabras, solucionemos un problema común para todos los laberintos.

Resolución del problema sobre los laberintos

Regla I. Partimos del punto inicial (primer cruce) y caminamos por cualquier camino que sea, hasta llegar a un tope (sendero sin salida) o a un nuevo cruce. Entonces:

1) Si llegamos a un tope tendremos que regresar al punto inicial y este camino recorrido deberá ser tachado, puesto que ya lo hemos transitado dos veces (ida y vuelta);

2) Si llegamos a un nuevo cruce, seguimos la marcha por un camino nuevo cualquiera, no olvidando cada vez marcar con una rayita transversal el camino por el cual llegamos y el camino por el cual continuamos el recorrido.

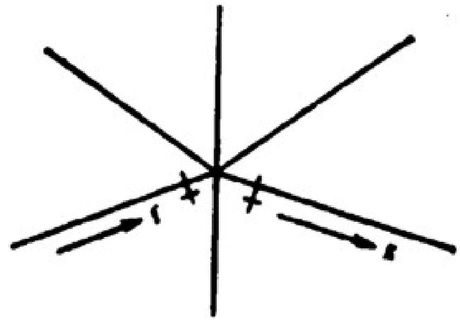


Figura 94

Conforme se ve en la figura 94, caminando en dirección marcada por la flecha f, llegamos a un cruce de caminos y tomamos la dirección que indica la flecha g, pero uno y otro camino lo marcamos con una rayita (en todos los dibujos con crucecitas están marcadas las rayitas, puestas durante el último paso por dicho cruce.)

Cumplimos esta primera regla cada vez que llegamos a un cruce en el que aún no hemos estado. Pero, al fin y el cabo, tendremos que dar con un cruce en el que ya estuvimos antes y, en este caso, pueden surgir dos variantes: al punto conocido llegamos por un camino por el que ya antes hemos pasado una vez, o bien por un camino nuevo no marcado con la rayita. Aquí debemos obedecer a las reglas siguientes:

Regla II. Cuando llegamos a un cruce ya conocido por nosotros, por un camino nuevo, debemos inmediatamente regresar, previamente marcando este camino con dos rayitas (llegada y regreso) como se ve en la fig. 95.

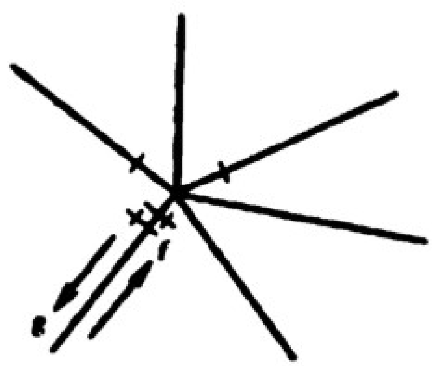


Figura 95

Regla III. Si llegamos al cruce ya conocido por un camino por el que ya hemos pasado antes una vez, entonces marcamos este camino con una segunda rayita y continuamos la marcha por uno de los caminos que si no hemos transitado, si es que tal camino existe. Este caso está representado en la fig. 96.

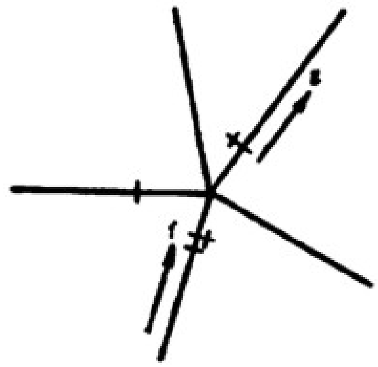


Figura 96

Pero si tal camino no existe, entonces, elegimos otro por el cual hemos pasado una sola vez. Este caso se da en la fig. 97.

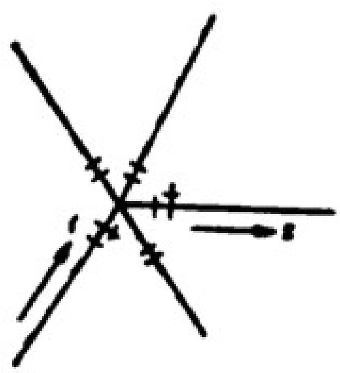


Figura 97

Obedeciendo exactamente las reglas indicadas, pasaremos dos veces por todas las líneas de la red y regresaremos al punto de partida. Esto se puede demostrar previamente hechas y comprendidas por nosotros las siguientes observaciones:

1) Saliendo del punto de partida, digamos de A, ponemos la señal inicial (una rayita transversal).

2) El paso por un cruce, conforme a una de las tres reglas anteriores, cada vez añade dos señales (dos rayitas transversales) a las líneas, que se unen en este punto.

3) En cualquier momento dado, durante el paso por el laberinto, antes de llegar a cualquier cruce o después de partir de él, el cruce inicial (punto de partida) tiene una cantidad de señales (rayitas) impar, mientras que cualquier otro cruce tiene una cantidad de señales par.

4) En cualquier momento, antes o después de pasar por un cruce, el cruce inicial tiene sólo un camino, marcado con una sola raya. Cualquier otro cruce, de los ya visitados por nosotros, puede tener sólo dos caminos, marcados con una sola raya.

5) Después de recorrer el laberinto por completo, en todos loe cruces, todos los caminos deben tener dos rayas. Esta última observación, por cierto, ya incluida directamente en las condiciones de la tarea planteada.

Teniendo en cuenta todo le expuesto, podemos convencernos con facilidad de que si alguien parte del cruce inicial, digamos A, y llega a cualquier otro cruce M, entonces no encontrará obstáculos tan difíciles que le impidan continuar el camino. En efecto, a este lugar llega o por un camino nuevo o por un camino por el que antes había pasado una vez. En el primer caso se debe aplicar la primera o segunda reglas, dadas anteriormente. En el segundo caso, la llegada el cruce M y su parada en él daría un número impar de señales alrededor de este cruce, por consiguiente, a falta de un camino nuevo, el recorrido debe continuarse por otro camino, por el que ya se ha pasado antes una vez y, entonces, alrededor de dicho cruce el número de señales será par (si no es el inicial) conforme a la observación 3.

Supongamos, por fin, que nos vemos obligados a terminar nuestro camino y regresar al cruce Inicial A.

Designamos por ZA esta última línea, o sea, la línea que conduce del cruce Z al cruce inicial A. Esto camino forzosamente tiene que ser el mismo por el que por primera vez partimos de A, de lo contrario el recorrido del laberinto podría ser prolongado. Y si ahora nos vemos obligados a regresar por el mismo camino al punto inicial, esto significa que desde el cruce Z ya no hay ningún otro camino que no haya sido pasado dos veces. De lo contrario esto significaría que se nos olvidó cumplir la primera parte de la regla III, más aún, esto significaría que en Z hay cierto camino YZ transitado sólo una vez, conforme a la observación 4.

Es decir, durante el último regreso a A, todos los caminos a Z deben estar marcados con dos rayas. Exactamente lo mismo so puede demostrar con referencia el cruce anterior Y y con respecto a todos los restantes. En otras palabras, nuestra afirmación queda demostrada y el problema resuelto.

173. Un laberinto rompecabezas

Daremos a continuación un laberinto no construido, sino simplemente dibujado (fig. 98) con una solución simplificada ya preparada: todos los topes (senderos sin salida) en él están rayados y los caminos principales, marcados con líneas rayadas o punteadas.

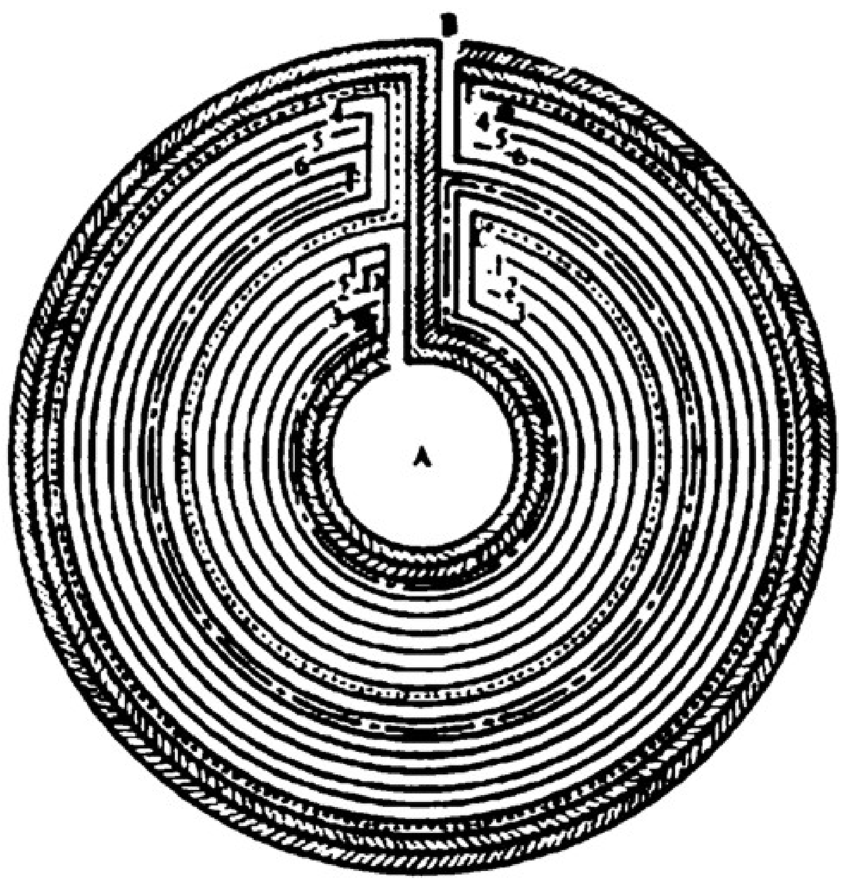


Figura 98

Por la resolución dada en el dibujo se ve que de A primero se debe ira C y al final de F a B.

Pero en cuanto llegamos a C, ante nosotros aparecen tres caminos, indicados con los números 1, 2 y 3, que conducen a D. Ocurre exactamente lo mismo cuando llegamos a E, donde también aparecen tres caminos, indicados por los números 4, 5 y d, que conducen a F. Tenemos también el camino de C a E, marcado con puntos, otro que conduce de D a F, marcado con puntos y rayas y un paso do D a B, marcado con unas estrellitas. Podemos, por consiguiente, representar la situación creada mediante un pequeño y simple diagrama, dado en la fig. 99.

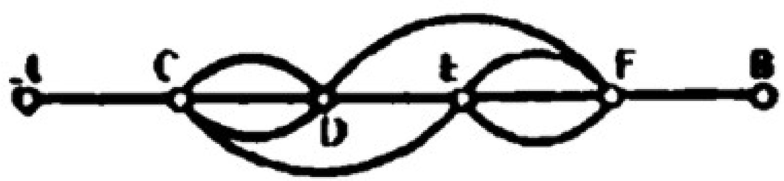


Figura 99

En él todos los caminos corresponden a los caminos del laberinto circular, pero así representados son más accesibles a la vista. Entonces resulta que, con las condiciones dadas, y también con la condición de no pasar don veces por un mismo camino, que en nuestro laberinto puede ser cumplida, tenemos 640 caminos (rutas) de A a B, lo que para un laberinto rompecabezas no es tanto. ¿Verdad?

174. Una glorieta

Y ahora, respetable lector, después de expuesto el procedimiento para la resolución del problema sobre los laberintos, que pensamos ha sido asimilado por usted, no le será difícil hallar el camino que conduce a una glorieta, situada en el parque representado en la fig. 100.

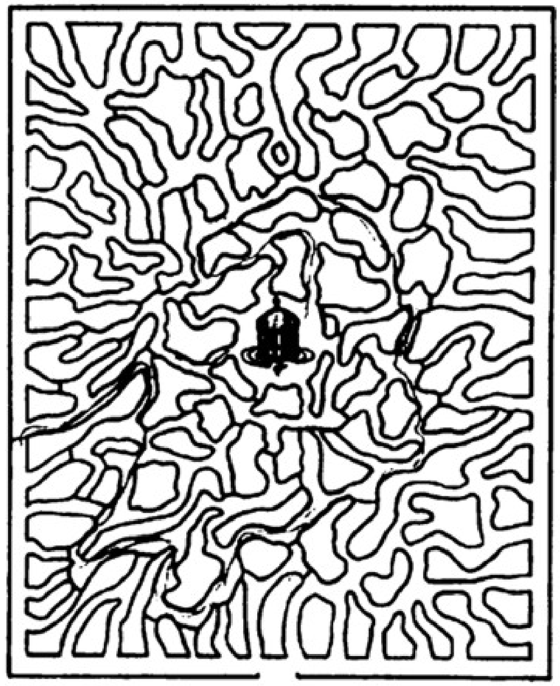


Figura 100

Posiblemente que, para reducir tiempo, le sea útil el consejo de comenzar la búsqueda partiendo de la glorieta y mejor hallar la salida de este pérfido parque que comenzar por la entrada. Más, si dispone usted de tiempo libre esto es indiferente.

175. Otro laberinto

He aquí otro ejemplo muy curioso de laberinto, en el cual se debe llegar al centro por el camino más corto (fig. 101).

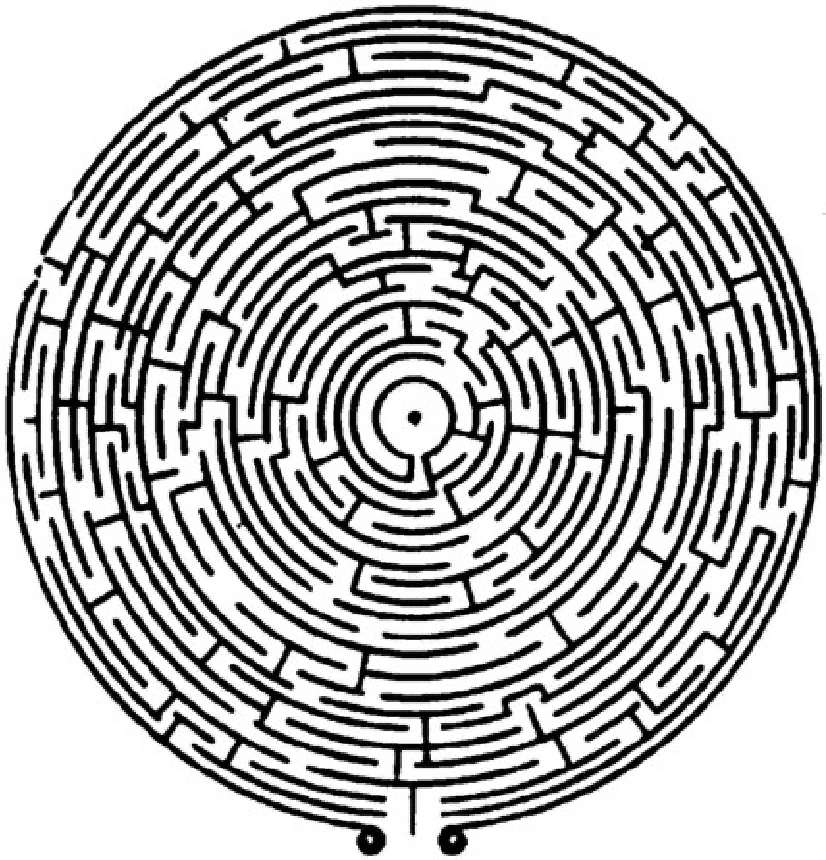


Figura 101

176. El laberinto del rey de Inglaterra

En uno de los jardines del palacio del rey de Inglaterra Guillermo III había un laberinto de paseos y setos vivos. Los paseos tenían cerca de una milla de largo; en el centro del laberinto había dos grandes árboles con bancos a los lados. El plano de este laberinto se muestra en la fig. 102.

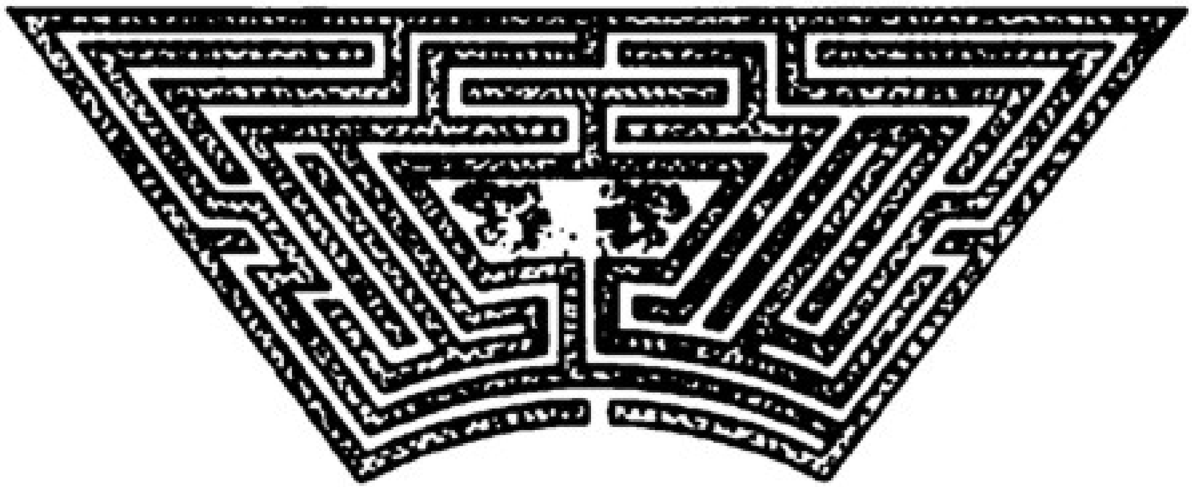


Figura 102

El secreto para llegara al centro del laberinto y salir del jardín consistía en que, en cuanto se pisaba en el laberinto y hasta el fin, era preciso tocar los setos vivos con la mano derecha.

SOLUCIONES, RESPUESTAS Y OBSERVACIONES

Capítulo 1
Problemas-bromas, Problemas-acertijos e Historias Graciosas

1. Una persona toma una manzana junto con la cesta.

2. Alguien quizás comience a reflexionar así: 4 gatos en los ángulos; enfrente de cada uno de ellos otros tres gatos, lo que suponen 12 gatos y, además, en el rabo de cada gato otro gato más, o sea, 16 gatos. Resultan en total 32 gatos. Es posible que a su modo de ver tenga razón. Paro más razón tendrá aquél que inmediatamente reflexione que en el cuarto hay solamente cuatro gatos. Ni más, al menos.

3. Si la pregunta se hace con rapidez, no dando tiempo al que responde para pensar, con frecuencia se obtiene una respuesta Incorrecta: después de 8 días. En realidad, el último trazo será cortado después de transcurrir 7 días.

4. Escribir este número después girar el papel "cabeza abajo" (en 180°). Resultará el 999.

5. Se puede, por ejemplo, -3/6 = 5/-10

6. Si dibuja la herradura mediante esa línea en forma de arco, como por regla general suele hacerse, entonces, por mucho que se piense no se conseguirá partirla, con dos líneas rectas, más que en cinco partes (fig.103 a)

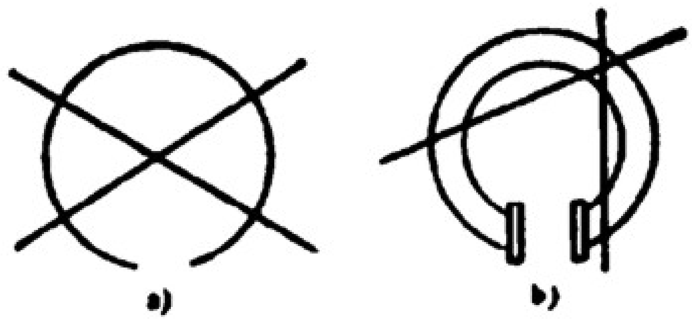


Figura 103

Otra cosa será si se dibuja mostrando su anchura, o sea, como es en realidad una herradura. Entonces, después de varias pruebas, hallaréis la solución del problema (fig. 103, b).

7. El anciano dijo en voz baja a los cosacos: "Cámbiense de lugar". Estos comprendieron de inmediato, cada uno de ellos montó el caballo de su contrincante y ambos lanzaron el caballo ajeno a todo galope, para que su propio caballo llegase segundo.

Capítulo 2
Ejercicios con Cerillas

9. Las cerillas se disponen así como se exhibe en la fig. 104. Se forma la palabra ocho.

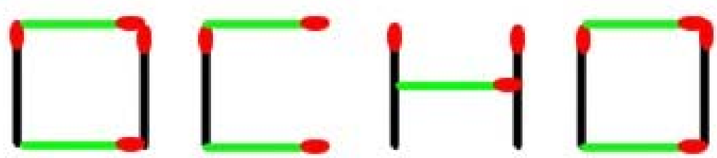


Figura 104

10. Véase la fig. 105.

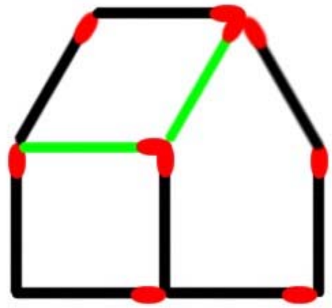


Figura 105

11. Véase la fig. 106.

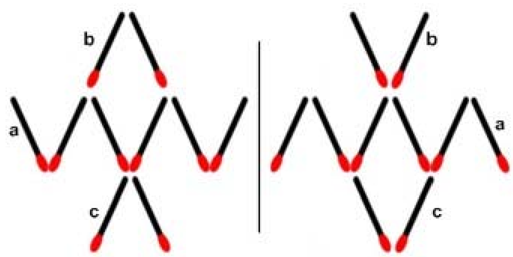


Figura 106

12. Véase la fig. 107.

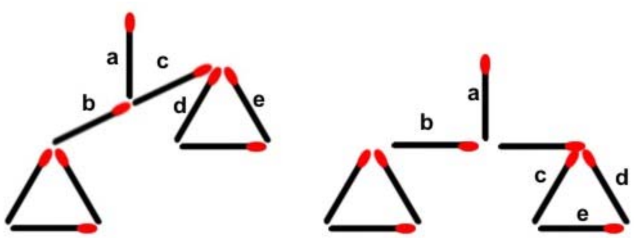


Figura 107

13. Véase la fig. 108.

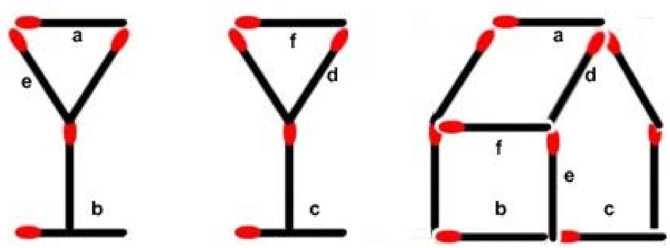


Figura 108

14. Véase la fig. 109.

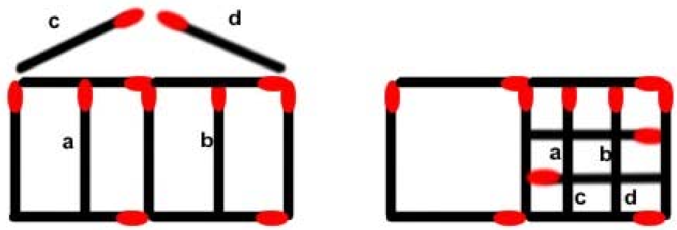


Figura 109

15. Véase la fig. 110.

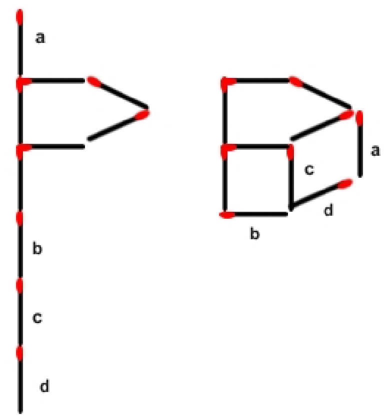


Figura 110

16. Véase la fig. 111.

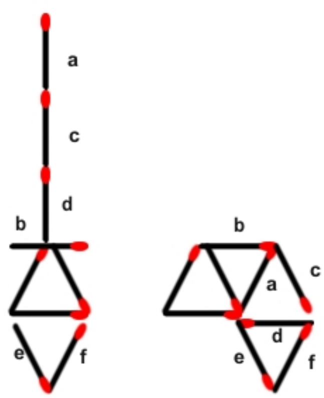


Figura 111

17. Véase la fig. 112.

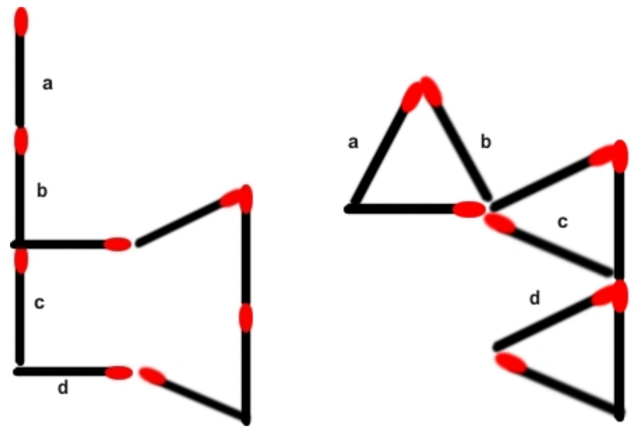


Figura 112

18. Véase la fig. 113.

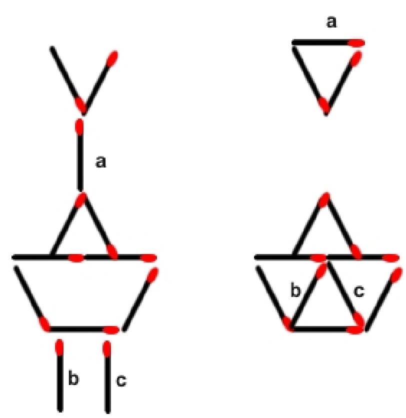


Figura 113

19. Véase la fig. 114.

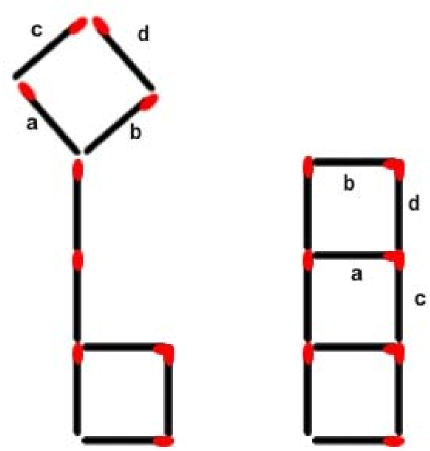


Figura 114

20. Véase la fig. 115.

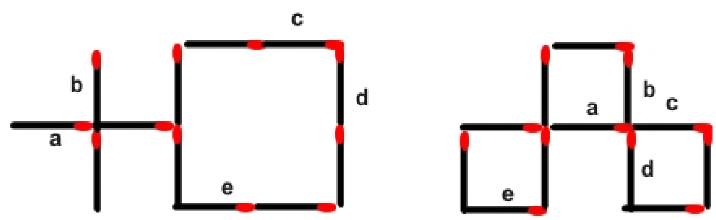


Figura 115

21. Véase la fig. 116.

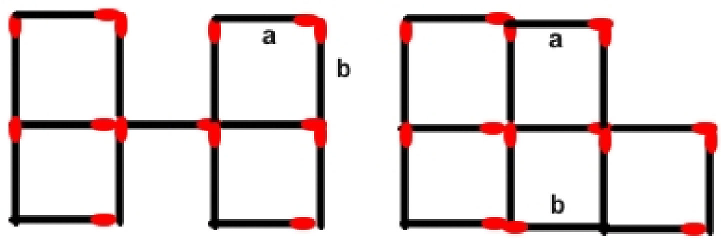


Figura 116

22. Véase la fig. 116a.

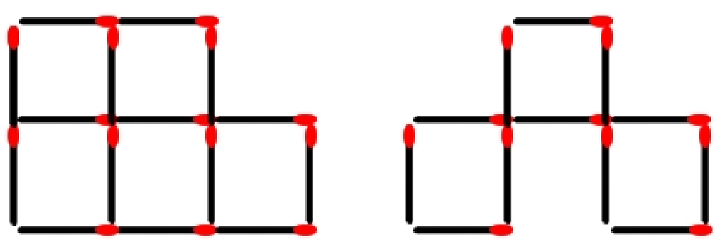


Figura 116a

23. Véase la fig. 117.

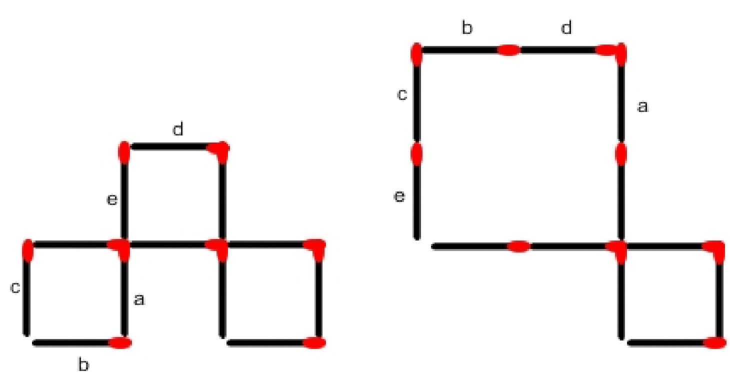


Figura 117

24. Véase la fig. 118.

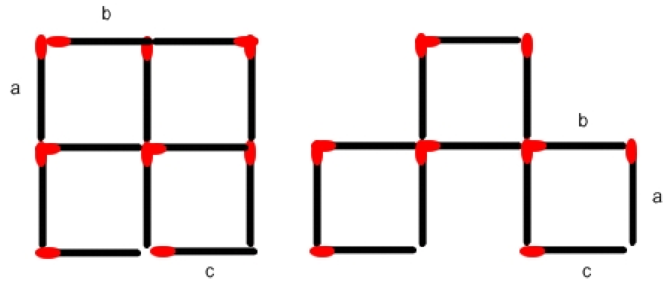


Figura 118

25. Véase la fig. 119.

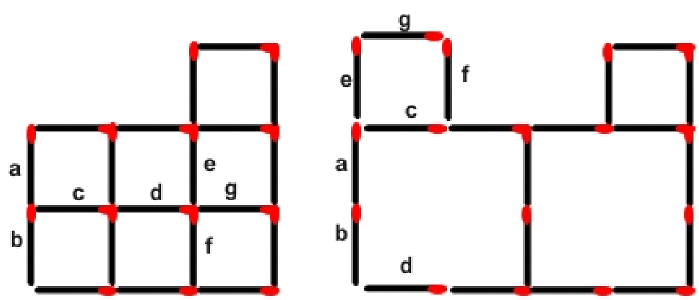


Figura 119

26. Dos soluciones posibles:

1. esto se puede hacer, por ejemplo, tal como se muestra en la fig. 120.

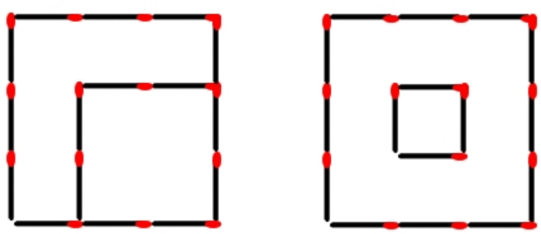


Figura 120

2. las soluciones se dan en la fig. 121.

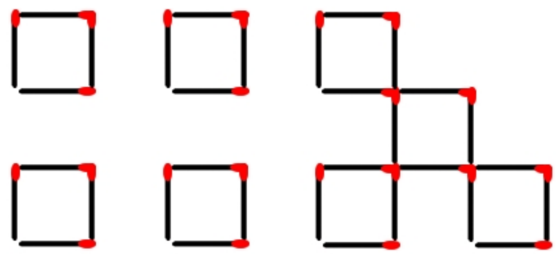


Figura 121

27. Sin vacilaciones se puede afirmar que a muy pocos se les ocurrirá de inmediato a la cabeza la solución de este simple problema. La cuestión consiste en que, en el caso dado, se debe construir con cerillas una figura no plana, sino en el espacio. Observar atentamente la fig. 122 y resolver el problema.

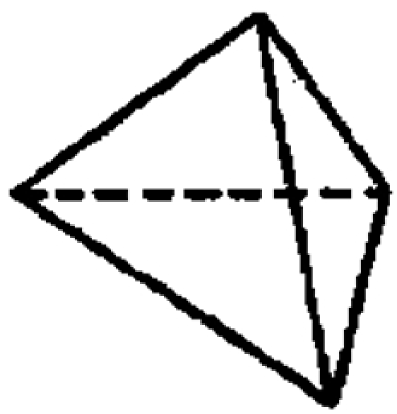


Figura 122

En ella se ha representado una pirámide triangular, cuyas caras forman triángulos equiláteros iguales entre sí. Poner sobre la mesa tres cerillas, de tal forma que constituyan un triángulo: después poner las otras tres, procurando que sus extremos inferiores se apoyen en los ángulos del triángulo tendido sobre la mesa, mientras que los entremos superiores de estas cerillas se unen sobre el centro del triángulo; con ello se cumplirán las condiciones del problema.

28. Este, a primera vista difícil problema, no obstante se revuelve con facilidad. Colocamos sobre la mesa la cerilla A (fig. 123).

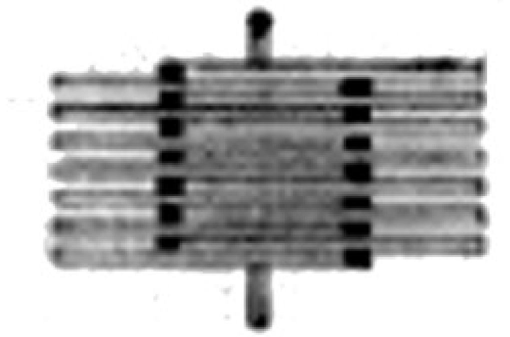


Figura 123

Transversalmente a ella, en fila compacta ponemos catorce cerillas más, de tal forma que las cabezas de los fósforos estén situadas alternativamente a la derecha y a la izquierda y que sobresalgan de 1 a 1,5 centímetros por encima de la cerilla A, mientras que su otro extremo reposa sobre la mesa. Encima, en la cavidad que forman las partes superiores de las cerillas, colocarnos la decimasexta cerilla, paralelamente a la A. Si levantamos ahora la cerilla A, sujetándola por un extremo, con ella levantaremos las 15 restantes (fig. 124).

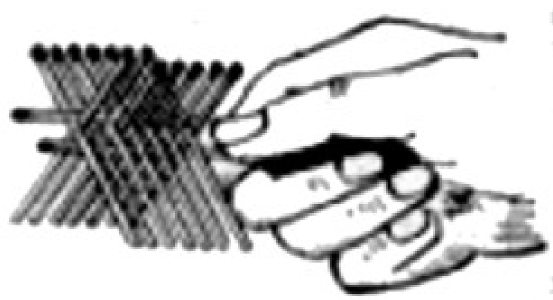


Figura 124

Capítulo 3.
¿Cómo Calcular?

30. La respuesta, aparentemente obvia, de “siete", por supuesto es incorrecta. Deben tenerse en cuenta lo mismo aquellos barcos que navegan ya hacia El Havre, como los que partirán en dicha dirección.

En el momento de la salida de nuestro barco de El Havre en camino, con dirección a dicho puerto, se encuentran 8 navíos de la misma compañía (uno de ellos entra al puerto de El Havre y parte del puerto de Nueva York). Nuestro buque se cruzará con los ocho. Además, durante los siete días de navegación, de Nueva York salen otros 7 buques (el último, en el momento de la llegada de nuestro barco a este puerto). Estos también se cruzarán con nuestro buque. O sea, la respuesta correcta es de 15 barcos.

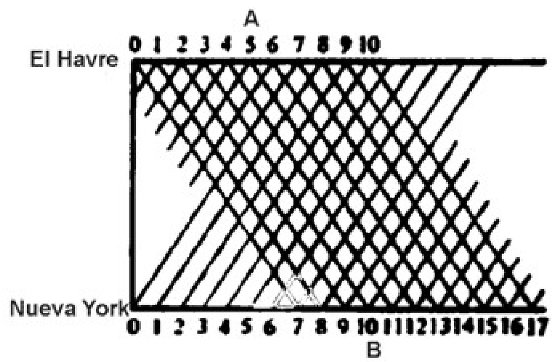


Figura 125

Para que quede más claro, daremos la solución de este problema en forma gráfica. En la fig. 125 se han trazado los gráficos de circulación de los barcos de dicha compañía: los días están distribuidos por los ejes horizontales. Por el dibujo vemos que el buque, cuyo gráfico de circulación está representado por el segmento AB, se cruza en el océano con 13 navíos más con otros dos en los, momentos de salida y de llegada, o sea en total con 15 buques. Estos gráficos muestran, además, que los encuentros suceden diariamente, al mediodía y a medianoche.

31. Este problema se resuelve inmediatamente si se reflexiona que el último (sexto) comprador le tocó una manzana entera. Entonces, al quinto le tocaron 2 manzanas, al cuarto 4, al tercero 8 y así sucesivamente. En total eran

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63 \text{ manzanas,}$$

o sea, la campesina trajo al mercado 63 manzanas

32. Con frecuencia, buscando la solución de problemas semejantes, se razona así: la oruga durante un día, o sea, durante 24 horas sube 5 m menos 2 m. Es decir, en total durante un día sube 3 m. Por consiguiente, la altura de 9 m será por ella alcanzada al cabo de tres días, es decir, estará a esta altura el miércoles a las 6 de la mañana.
Pero esta respuesta es evidentemente incorrecta.
Al final del segundo día, o sea, el martes a las seis de la mañana, la oruga estará a una altura de 6 m; pero ese mismo día, comenzando desde las seis de la mañana y hasta las seis de la tarde, puede subir otros 5 m más. Por lo tanto, a una altura de 9 m como eso fácil calcular, la oruga se encontrará el martes a las 13 h 12 min. (Naturalmente, debe considerarse que la oruga avanza con velocidad constante).

33. Con frecuencia, para resolver este problema, se procede a diversos cálculos y reflexiones "finas", sin tomarse el trabajo de aclarar que la mosca voló sin parar, exactamente 3 horas y, por consiguiente, cubrió una distancia de 800 kilómetros.

34. Este problema es muy parecido al anterior. La respuesta no depende de a quién de los caminantes pertenece el perro, al primero o al segundo. El segundo caminante alcanza al primero al cabo de 4 h y durante este tiempo el perro recorre 4 x 15 = 60 km.

35. Cualquier número, que termine en 5, puede ser representado de la forma 10*a* + 5, siendo *a* la cantidad de decenas.
Entonces

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 2 \times 5 \times 10a + 25 =$$
$$100a^2 + 100a + 25 = a(a + 1) \times 100 + 25$$

Esta igualdad demuestra por qué a la derecha del número a(a + 1) es preciso agregar 25 para obtener el cuadrado del número 10a + 5

Se puede utilizar un procedimiento análogo para elevar al cuadrado no sólo números de dos cifras, sino cualquier número entero terminado en 5. En este caso, no siempre es fácil realizar los cálculos precisos mentalmente. No obstante, economiza mucho más tiempo que cuando se multiplica en el papel. Así, por ejemplo,

$$10 \times 11 = 110, \text{ entonces, } 105^2 = 11.025,$$
$$12 \times 13 = 156, \text{ entonces, } 125^2 = 15.625$$
$$123 \times 124 = 15.252, \text{ entonces, } 1.235^2 = 1.525.225.$$

31. Puesto que llevando la cifra 2 al primer lugar el número se duplica, entonces, su penúltima cifra deberá ser 4 (2 x 2 = 4), la antepenúltima será 8 (2 x 4 = 8), la que antecede a ésta última será 6 (8 x 2 = 16), la anterior a esta 3 (1 + 2 x 6 = 13), después 7 (1 + 2 x 3 = 7) y así sucesivamente. Nuestro número deberá comenzar por 1. Por eso, hay que detenerse cuando después de la duplicación de la cifra y la adición de 1, de las cifras del orden anterior obtenemos 1.
El número buscado será

105.253.157.894.736.842.

Este es uno de los números que satisfacen las condiciones del problema. Todos los demás (son infinitamente muchos, se pueden obtener siguiendo el procedimiento indicado. Es fácil observar que cada uno de estos números estará compuesto por las combinaciones de cifras, ya halladas por nosotros, varias veces repetidas.

37. Se aprecia con facilidad que si al número buscado se le agrega una unidad, el resultado será divisible por 2, 3, 4, 5 y 6. El número más pequeño con estas propiedades es el número 60 (mínimo común múltiplo) y todos los números, con estas propiedades son contenidos en la serie 60, 120, 180... El número buscado se divide por 7, entonces, en la serie indicada es preciso hallar un número que dividido por 7 tenga un resto igual a 1. Esta condición la satisface el número 120. Así pues, el número 119 es el menor que resuelve el problema.

39. Es preciso tomar cada manzana y regresar donde está la cesta. Entonces, la cantidad de metros andados será igual a la suma duplicada de los primeros cien números, o cien veces multiplicado por 101, a decir, 10100. Esto supone más de 10 kilómetros. Como vemos, resulta un método de recolectar manzanas, bastante fatigoso.

40. La máxima cantidad de campanadas que da un reloj ordinario es de 12. El problema se reduce a la determinación de la suma de todos los números de 1 a 12.
Esto, como ya sabemos, es igual a la mitad de doce veces multiplicado por trece. Pero la jornada tiene dos veces 12 horas, o sea, 24 horas. Entonces, el reloj da 12 veces 13 campanadas es decir, 156 golpes (12 x 13 = 156).
Si el reloj también da campanadas para marcar las medias horas, entonces ¿cuántas campanadas en total dará durante una jornada? Suponemos que el lector dará respuesta a esta pregunta sin dificultad.

42. Debemos hallar la suma de todos los números impares de 1 a 2n - 1 y cerciorarnos de que esta suma es igual a n^2. Esto se puede realizar por distintos procedimientos. Nosotros hemos preferido el geométrico.

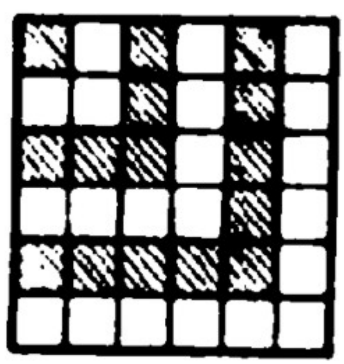


Figura 126

Tomamos un cuadrado de n^2 casillas y rayamos estas casillas, tal como se muestra en la fig. 126, para n = 6. Con ello el cuadrado se descompone en sectores, situados en orden alternativo con respecto al color. Contemos la cantidad de casillas de cada sector, comenzando por el ángulo superior a la izquierda. El primer sector contiene una casilla; el segundo, 3; el tercero, 5 y así sucesivamente, el último n-ésimo sector contiene 2n - 1 casillas_ por consiguiente, la cantidad de casillas en el cuadrado es igual a

$$1 + 3 + 5 + +7\ldots + 2n - 1$$

Esto nos demuestra que la igualdad requerida siempre se cumple.
(con ayuda de representaciones geométricas se pueden calcular también otras sumas.

Capítulo 4
Pasos y Cruces

43. Basta con ver el dibujo adjunto (fig. 127) para comprender cómo se resuelve este problema.

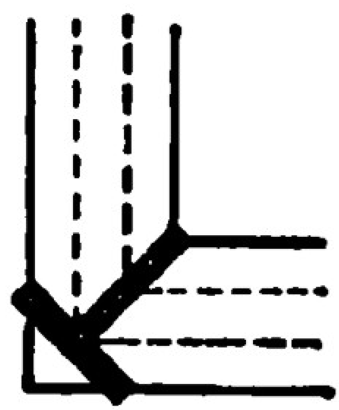


Figura 127

En lo que se refiere a la demostración matemática de la posibilidad de un paso semejante, pues se desprende de la desigualdad 2√2 <3 y se hace evidente, si se toma el ancho del foco igual a tres unidades arbitrarias.

44. Los niños cruzaron el río. Uno se quedó en la otra orilla y el otro regresó donde los soldados y salió de la barca. En la embarcación se sentó un soldado y pasó a la otra orilla. El niño que estaba en aquella orilla se sentó en la barca y regresó donde los soldados. En la barca se sentó un compañero y los dos pasaron a la otra orilla. Uno de ellos se quedó en ella y el otro regresó donde los soldados y salió de la barca. En la embarcación se sentó el segundo soldado y pasó a la otra orilla. De tal forma, después de cada dos cruces del río, en ambas direcciones, a la otra orilla pasaba un soldado. Esto se repitió tantas veces cuantos soldados eran.

45. Por supuesto, se debe comenzar por la cabra. El campesino pasa la cabra a la otra orilla y regresa a la primera solo. Aquí toma el lobo y pasa con él a la otra orilla, lo deja en ella y coge la cabra, con la que regresa a la primera orilla. Deja en esta orilla a la cabra y toma las berzas. Es la otra orilla deja las berzas con el lobo y regresa donde está la cabra. Coge la cabra y pasa con ella a la otra milla. De tal forma la travesía del río concluye con éxito.

46. Este problema tiene una antigüedad considerable. Denominamos a los caballeros con las letras mayúsculas A, B, C y a sus escuderos con las minúsculas a, b, c respectivamente.
Tenemos:

<table>
<tr><td>Primera orilla</td><td>Segunda orilla</td></tr>
<tr><td>A B C
a b c</td><td>• • •
• • •</td></tr>
<tr><td colspan="2">I. Primero cruzan el río los escuderos</td></tr>
<tr><td>A B C
• • c</td><td>• • •
a b •</td></tr>
<tr><td colspan="2">II. Uno de ellos regresa y pasa el tercer escudero</td></tr>
<tr><td>A B C
• • •</td><td>• • •
a b c</td></tr>
<tr><td colspan="2">III. Regresa uno de los escuderos y se queda con su caballero. Los otros dos caballeros pasan el río donde sus escuderos</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>● ● C
● ● c</td><td>A B ●
a b ●</td></tr>
<tr><td colspan="2">IV. Uno de los caballeros vuelve con su escudero a la primera orilla, le deja en ella y regresa a la segunda con el tercer caballero</td></tr>
<tr><td>● ● ●
● b c</td><td>A B C
a ● ●</td></tr>
<tr><td colspan="2">V. El escudero a cruza el río y coge a uno de los escuderos de la otra orilla</td></tr>
<tr><td>● ● ●
● ● c</td><td>A B C
a b ●</td></tr>
<tr><td colspan="2">VI. El caballero C recoge a su escudero</td></tr>
<tr><td>● ● ●
● ● ●</td><td>A B C
a b c</td></tr>
</table>

47. Cuatro caballeros con sus escuderos no pueden pasar de la primera a la segunda orilla del río, cumpliendo las condiciones del problema anterior. Para aclarar lo dicho, supongamos que el cruce del río es posible. Entonces, reenumerarnos, comenzando por el primero, todos los recorridos de la embarcación. De tal forma, después de los recorridos impares la barca se encontrará en la segunda orilla y después de los pares, en la primera. Designamos por 2k + 1 el número menor del recorrido impar, merced al cual en la segunda orilla resultan más de dos caballeros. Durante el recorrido con el número 2k + 1 pueden pasar a la segunda orilla no más de dos personas, por tanto, después del recorrido 2k - 1 en la segunda orilla debe encontrarse, por lo menos, un caballero. Así, pues, vemos que después del recorrido 2k - 1 en la segunda orilla puede haber uno o dos caballeros.

En el primer caso denominamos a los caballeros, que quedaron en la primera orilla mediante las letras A, 8, C y al caballero que pasa a la segunda orilla mediante la letra D. Si denominamos a sus respectivos escuderos por a, b, c, d, entonces, cumpliendo las condiciones del problema, es posible una única distribución de los escuderos. O sea en el primer caso, después del recorrido número 2k -1 obtenemos el siguiente cuadro:

Primera orilla	Segunda orilla
A B C a b c	D d

¿Quién navega en la barca durante el recorrido 2k? El caballero D no puede, puesto que entonces después del recorrido 2k + 1 en la segunda orilla habrá no más de dos caballeros. Por consiguiente, durante el recorrido 2k en la barca puede cruzar sólo el escudero d, pero entonces, en la primera orilla éste se verá en compañía de caballeros ajenos, lo que contradice las condiciones del problema. Así resulta que durante el recorrido 2k en barca no puede viajar nadie. Esto significa que el primer caso es imposible.

En el segundo caso denominaremos a los caballeros en la primera orilla mediante A, B, y a los caballeros que pasaron a la segunda, mediante C, D. Entonces, después sol recorrido 2k - 1 tenemos

Primera orilla	Segunda orilla
A B a b	C D c d

¿Quién en este esto monta en la barca durante el recorrido 2k? Ninguno de los caballeros C, D parda hacerlo, puesto que entonces, durante el recorrido 2k + 1, de la primera orilla deben partir dos caballeros y uno de los escuderos, a o b, queda sin defensa. Pero tampoco ninguno de los escuderos, c, d, puede pasar a la primera orilla durante el recorrido 2k sin su caballero, puesto que en la primera orilla se encuentran A y B. Otra vez resulta que durante el recorrido 2k nadie puede cruzar la barca.

Así pues hemos establecido que cumpliendo las condiciones del problema, a la segunda orilla no poden pasar más de dos caballeros.

48. Denominamos a los caballeros con las letras A, B, C, D y a sus escuderos con a, b, c, d, respectivamente.

Primera orilla	Segunda orilla
A B C D b c d	• • • • • • • •
I. Pasan a la otra orilla los escuderos b, c, d	
A B C D A • • •	• • • • • b c d
II. El escudero b regresa y los caballeros C, D, pasan a la otra orilla	
A B • • a b • •	• • C D • • c d
III. El caballero C y su escudero regresan a la primera orilla. Después los caballeros A, B, C pasan a la segunda orillas	
• • • • a b c •	A B C D • • • d
IV. El escudero d pasa a la primera orilla y junto con los escuderos b, c, regresa a la segunda	
• • • • a • • •	A B C D • b c d
V. Uno de los escuderos pasa a la primera orilla y junto con el escudero a regresa a la segunda	
• • • • • • • •	A B C D a b c d

49. Utilizaremos las denominaciones, dadas es los problemas anteriores:

Primera orilla	Isla	Segunda orilla
A B C D a b c d		• • • • • • • •
I. El caballero D pasa a su escudero a la isla y regresa a la primera orilla		

A B C D a b c •	• d	• • • • • • • •
II. El caballero C pasa a su escudero a la segunda orilla y regresa a la primera		
A B C D a b • •	• d	• • • • • • c •
III. El caballero B pasa a la isla al caballero D, después va donde su escudero y junto con él, regresa a la primera orilla		
A B C • a b c •	D d	• • • • • • • •
IV. Los caballeros A, B, C junto con sus escuderos pasan a la segunda orilla sin desembarcar en las isla (véase el problema 46):		
• • • • • • • •	D d	A B C • a b c •
V. El caballero A con su escudero pasa a la isla, deja en ella a su escudero y pasa a la segunda orilla junto con el caballero D.		
• • • • • • • •	a d	A B C D • b c •
VI. El escudero b pasa a la segunda orilla primero al escudero a y luego al d:		
• • • • • • • •		A B C D a b c d

50. La vía principal y el desvío en la estación tienen la configuración dada en la fig. 128.

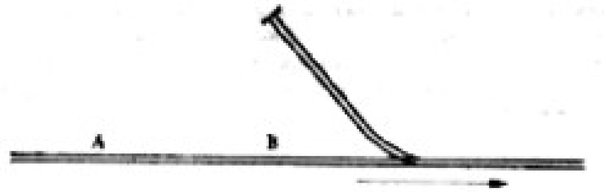


Figura 128

Por la vía principal, en la dirección indicada por la flecha, avanza el tren B y detrás de él el tren A, al cual se le debe ceder el paso valiéndose del desvío, en el que entra solamente una parte de los vagones del tren B.

El tren A alcanza al tren B y debe seguir su marcha. ¿Qué hacer? Pues lo siguiente.

El tren B va por la vía principal y pasa con todos sus vagones más allá del desvío. Después da marcha atrás, entra en el desvío y deja en él los vagones posibles; la locomotora, junto con los vagones restantes, tira hacia delante y se aleja del desvío. Luego se deja pasar al tren A; a su último vagón se enganchan los vagones del tren B, que quedaron en el desvío, y junto con ellos tira primero hacia delante, con el fin de que todos los vagones del tren B pasen a la vía principal, y luego da marcha atrás liberando la entrada del desvío. A continuación la locomotora del tren B, junto con una parte de los vagones, pasa al desvío, dejando paso libre por la vía principal al tren A. Del tren A se desenganchan los vagones del tren B. El tren A continúa velozmente la marcha. Mientras tanto, la locomotora del tren B sale a la vía principal; dando marcha atrás, engancha sus últimos vagones, que quedaron a la izquierda del desvío y sigue también su ruta detrás del tren A.

51. La posición de los barcos en el canal con la bahía se da en la fig. 129.

Figura 129

Los buques B y C dan marcha atrás (hacia la derecha) y el barco A entra en la bahía; los buques D, E y F pasan por el canal junto a la bahía; el barco A sale de él y continúa navegando por el canal (hacia la izquierda); los buques D, E F regresan al lugar en que estaban al principio (a la izquierda de la bahía); el buque B repite la maniobra del A. De la misma forma pasa el barco C y los buques continúan navegando en las direcciones correspondientes.

Capítulo 5
Repartos en Circunstancias Difíciles

52. Si de las 5 rosquillas que tenemos partimos 3 en dos mitades cada una, entonces, tendremos dos partes iguales y damos una parte a cada niño. Después partimos las dos rosquillas restantes en 3 partes iguales cada una y otra vez tendremos 6 partes que también repartimos entre los niños. De tal forma, el problema se resuelve sin partir ninguna rasquilla en 6 partes.

53. Nikita y Pavel hacen mal el cálculo. Los 11 panecillos fueron divididos entre tres a partes iguales, entonces, cada uno comió 11/3 panecillos.
Pavel tenía 7 panecillos, comió 11/3 panecillos, por consiguiente, al cazador le dieron 10/3 panecillos.
Nikita, de sus cuatro panecillos comió también 11/3 panecillos, por consiguiente, el cazador le dio 1/3 (una tercera parte) de panecillo,
El cazador comió 11/3 panecillos y pagó por ellos 11 kopeks, entonces, cada tercera parte de panecillo dio un kopek. A Pavel le tomó 10 terceras partes y a Nikita, una tercera parte; por lo tanto, Pavel debe tomar 10 kopeks y Nikita 1 kopek.

54. Iván propuso a los campesinos dividir el trigo de la siguiente forma:
- Yo divido el trigo en tres montones, a mi parecer iguales, y me aparto a un lado. Me conformo con cualquier montón. Después que indique Piotr el montón donde él considera que hay menos trigo. Si Nikolai también considera que ese montón es el más pequeño, entonces, me lo dan, El resto de trigo lo dividen entre ustedes de la misma forma. Si Nikolai decide que en el montón indicado no hay menos de una tercera parte de todo el trigo, entonces, se lo lleva él. Piotr que coja el montón mayor de los dos restantes, según su parecer, y el que quede será para mí.
Los campesinos siguieron el consejo de Iván, dividieron el trigo y se fueron satisfechos.

55. Se supone, naturalmente, que todas las barricas; las llenas, las semillenas y las vacías, son iguales entre sí. Está claro que cada uno de los negociantes debe recibir

siete barricas. Calculemos ahora cuanto kvas deberá pertenecer a cada uno de ellos. Tenemos 7 barricas llenas y 7 vacías. Si fuese posible de cada barrica llena echar la mitad a una vacía, entonces, resultarían 14 barricas llenas hasta la mitad (semillenas); añadiendo a ellas otras 7, ya semillenas, resultarían 21 barricas, cada una con la misma cantidad de kvas, Entonces, a cada negociante le tocarían 7 barricas semillenas de kvas, Sabiendo esto, podemos dividir el kvas en partes iguales, sin pasarlo de una barrica a otra de la siguiente forma:

	Barricas		
	llenas	semillenas	vacías
Primer negociante	2	3	2
Segundo negociante	2	3	2
Tercer negociante	3	1	3

Y otra solución es:

	Barricas		
	llenas	semillenas	vacías
Primer negociante	3	1	3
Segundo negociante	3	1	3
Tercer negociante	1	5	1

56. Este problema tiene dos soluciones que consisten, por lo visto, en trasvasar kvas de la barrica grande a las pequeñas y de éstas otra vez trasvasar kvas y así sucesivamente.

Damos estas soluciones mediante dos tablas, que indican cuánto kvas queda en cada barrica después de cada trasvase.

Solución 1

	Barrica		
	grande	de 5 calderos	de 3 calderos
Antes del trasvase	8	0	0

Después de trasvase N° 1	3	5	0
Después de trasvase N° 2	3	2	3
Después de trasvase N° 3	6	2	0
Después de trasvase N° 4	6	0	2
Después de trasvase N° 5	1	5	2
Después de trasvase N° 6	1	4	3
Después de trasvase N° 7	4	4	0

Solución 2

	Barrica		
	grande	de 5 calderos	de 3 calderos
Antes del trasvase	8	0	0
Después de trasvase N° 1	5	0	3
Después de trasvase N° 2	5	3	0
Después de trasvase N° 3	2	3	3
Después de trasvase N° 4	2	5	1
Después de trasvase N° 5	7	0	1
Después de trasvase N° 6	7	1	0
Después de trasvase N° 7	4	4	0

57. Solución 1

	Barrica		
	grande	de 5 calderos	de 3 calderos
Antes del trasvase	16	0	0
Después de trasvase N° 1	10	0	6
Después de trasvase N° 2	0	10	6
Después de trasvase N° 3	6	10	0
Después de trasvase N° 4	6	4	5
Después de trasvase N° 5	12	4	0

Después de trasvase N° 6	1	11	4
Después de trasvase N° 7	1	9	6
Después de trasvase N° 8	7	9	0
Después de trasvase N° 9	7	3	6
Después de trasvase N° 10	13	3	0
Después de trasvase N° 11	2	11	3
Después de trasvase N° 12	2	8	6
Después de trasvase N° 13	8	8	0

Solución 2

	Barrica		
	grande	de 5 calderos	de 3 calderos
Antes del trasvase	16	0	0
Después de trasvase N° 1	10	0	6
Después de trasvase N° 2	10	6	0
Después de trasvase N° 3	4	6	6
Después de trasvase N° 4	4	11	1
Después de trasvase N° 5	15	0	1
Después de trasvase N° 6	15	1	0
Después de trasvase N° 7	9	1	6
Después de trasvase N° 8	9	7	0
Después de trasvase N° 9	3	7	6
Después de trasvase N° 10	3	11	2
Después de trasvase N° 11	14	0	2
Después de trasvase N° 12	8	2	6
Después de trasvase N° 13	8	8	0

58. Solución 1

	Barrica		
	grande	de 5 calderos	de 3 calderos

Antes del trasvase	4	0	6
Después de trasvase N° 1	1	3	6
Después de trasvase N° 2	1	2	7
Después de trasvase N° 3	6	2	2
Después de trasvase N° 4	5	3	2
Después de trasvase N° 5	5	0	5

Solución 2

	Barrica		
	grande	de 5 calderos	de 3 calderos
Antes del trasvase	4	0	6
Después de trasvase N° 1	4	3	3
Después de trasvase N° 2	6	1	3
Después de trasvase N° 3	2	1	7
Después de trasvase N° 4	2	3	5
Después de trasvase N° 5	5	0	5

Es fácil formular un conjunto de soluciones semejantes. Pero las tablas dadas no responden a la pregunta: ¿a qué regla atenerse para hallar estas soluciones? Con el fin de determinar esta regla vamos a presentar el problema de otro modo, en forma geométrica. Para precisar, examinemos el problema 58. Designamos por x e y la cantidad de líquido contenido después de cualquier trasvase respectivamente a la primera y segunda barricas. Durante los trasvases la cantidad total de líquido no varia, es decir, siempre es igual a 4 + 6 = 10 calderos. Por lo tanto, en la tercera barrica habrá 10 - x - y calderos de líquido. La cantidad de líquido contenido en una barrica no puede superar la capacidad de ésta. Vemos que los valores x e y satisfacen esas condiciones:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 3 \\ 0 \le 10 - x - y \le 7 \end{cases}$$ formula 1

O bien:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 3 \\ 3 \le x + y \le 10 \end{cases}$$ formula 2

Más adelante nos será más cómodo utilizar un pliego de papel cuadriculado. En él elegimos un punto cualquiera y trazamos dos líneas perpendiculares entre si y coincidentes con las líneas del cuadriculado, que pasen por el punto elegido. Llamaremos a una de ellas eje X, y a la otra eje Y.

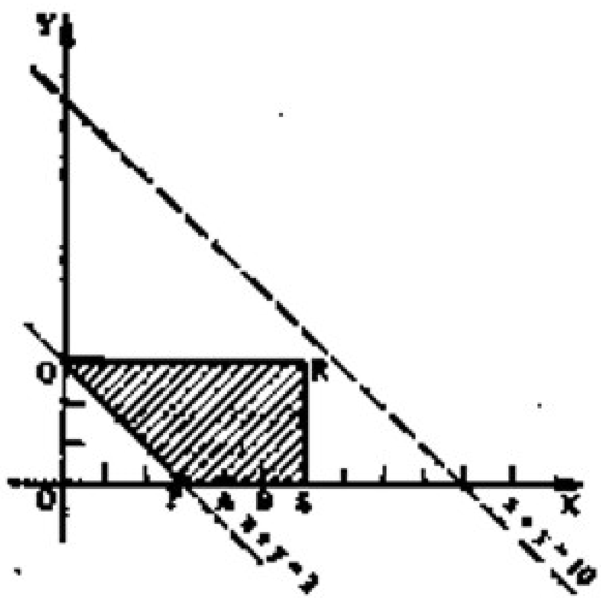


Figura 130

Entonces, podemos representar cada par de números [x, y] mediante un punto correspondiente en el pliego de papel con coordenadas [x, y]. Indiquemos en el plano todos los puntos, cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades dadas anteriormente. En la fig. 130 este conjunto de puntos (la parte interior del cuadrilátero PQRS) está rayado. El momento inicial de la distribución del liquido corresponde en este dibujo, al punto A (x = 4, y = 0). La distribución que queremos obtener, al punto B (x = 5, y = 0, con ello, en la tercera barrica habrá 5 calderos).

La sucesión de trasvases, que conduce de la distribución A a la distribución B, aparece en la figura dada como una sucesión de puntos. O bien, si unimos mediante una línea recta cada dos puntos consecutivos, obtenemos una línea quebrada, del punto A al B.

Probemos aclarar qué condiciones deben satisfacer los vértices de esta línea quebrada y sus eslabones.

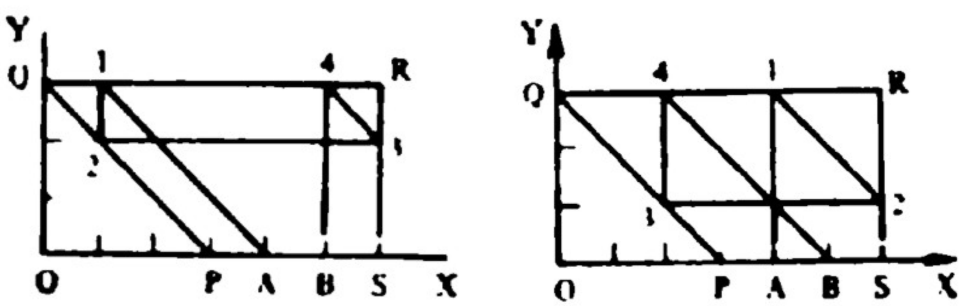
El trasvase finaliza en el momento en que se llena la barrica a la que echamos el líquido, o bien se vacía la barrica de la que extraemos el líquido. Esto demuestra que después de cada trasvase obligatoriamente habrá, por lo menos, una barrica vacía o una barrica llena. ¿Dónde, pues, se situarán los puntos correspondientes en el cuadrilátero PQRS? Si está llena la primera barrica ($x = 6$), entonces, el punto yace en el segmento RS y si está vacía ($x = 0$), entonces deben estar llenas la segunda y tercera barricas ($3 + 7 = 10$). Hay un sólo punto con estas condiciones, el Q. Las distribuciones, después de las cuales resulta vacía la segunda barrica ($y = 0$) corresponden a los puntos en el segmento PS y a la segunda barrica resulta llena ($y = 3$) a los puntos del segmento QR. Por último, la tercera barrica no puede estar vacía, puesto que en las dos primeras no caben 10 calderos, pero si dicha barrica está llena, entonces, en las dos primeras habrá un contenido de $10 - 7 = 3$ calderos ($x + y = 3$) Sus puntos correspondientes yacen en el segmento PQ. En cualquier caso, estos puntos yacen en los bordes (lados) del cuadrilátero PQRS. O a sea, los vértices de la línea quebrada deben distribuirse en los bordes del cuadrilátero PQRS.

Observaremos a continuación que después de cada trasvase el contenido de una barrica queda invariable, pues cada uno de ellos se refiere solamente a dos barricas. Si no cambia el contenido de la primera barrica (x constante), entonces, el segmento que une puntos correspondientes a las distribuciones de antes y después del trasvase, es paralelo al eje Y (al comienzo y final del segmento, la coordenada x tiene un mismo valor). Si después del trasvase no cambia el contenido de la segunda barrica, entonces, el eslabón correspondiente de la línea quebrada es paralelo al eje X (y constante). Por último, si en el trasvase no se utiliza la tercera barrica, entonces se conserva la cantidad total de líquido en las dos primeras. En otras palabras, en los extremos del segmento la suma $x + y$ adquiere un mismo valor. Esto significa que el eslabón de la línea quebrada es paralelo al segmento PQ. O sea, cada eslabón de la línea quebrada es perpendicular al eje OX, o bien al eje OY, o a la bisectriz del ángulo formado por estos ejes.

Para comprobar nuestros cálculos, supongamos que cierto eslabón de la línea quebrada yace en un lado del polígono PQRS, por ejemplo, en el segmento PQ, ¿Qué significa esto? Este eslabón forma ángulos iguales con la tercera barrica. Además, esta barrica está llena. Las dos primeras barricas contienen en conjunto x + y = 3 calderos de líquido, por eso el trasvase termina si queda vacía la primera barrica (x = 0, punto Q) o bien la segunda (y = 0, punto P). Exactamente lo mismo se puede reflexionar con respecto a los otros lados del polígono PQRS. Hemos aclarado que si uno de los eslabones de la línea quebrada yace en un lado de PQRS, su extremo obligatoriamente coincide con uno de los puntos P, Q, R, S.

Nuestro problema en el lenguaje geométrico, toma la siguiente forma: unimos los puntos A y B mediante una línea quebrada, cuyos vértices yacen en un lado del polígono y cuyos eslabones son paralelos a los ejes X, Y o forman ángulo iguales con los ejes. Si al mismo tiempo un eslabón yace en uno de los lados del polígono, entonces, su extremo debe coincidir con uno de los vértices.

De esta forma el problema adquiere más claridad y las líneas quebradas requeridas se hallan sin dificultad (figs. 131 y 132).



Figuras 131 y 132

En un papel cuadriculado no es difícil trazar líneas quebradas, ya que todos los eslabones pasan por los nudos de retículos y los vértices coinciden con los nudos.

Las líneas quebradas, representadas en las figs. 131 y 132, corresponden a la primera y segunda soluciones, lo que no es difícil de comprobar.

En otros problemas el cuadrilátero PQRS puede ser sustituido por otros polígonos: paralelogramo (problema 56), pentágono (problema 57). Pueden surgir hexágonos, pero siempre 6 será la cantidad máxima posible de lados. La formulación del problema en estos casos sigue siendo la misma, cambia solamente el polígono y la posición de los puntos A, B.

La representación geométrica del problema y su solución es clara, no obstante, la construcción de las figuras requiere tiempo suplementario, papel y lápiz.

Intentaremos, a base de reflexiones geométricas, dar recomendaciones de cómo hallar en cualquier problema semejante el procedimiento correspondiente (si existe) sin recurrir a construcciones.

Los vértices del polígono corresponden a las distribuciones, durante las cuales inmediatamente dos barricas se hallan en estado límite (las dos están vacías; las dos están llenas: una está vacía y la otra está llena).

I. Ante todo hay que conseguir, mediante trasvases, que por lo menos dos barricas se hallen en el estado límite. Geométricamente esto corresponde a la construcción de una línea quebrada, que comience en el punto A y termine en uno de los vértices del polígono

II. Se debe pasar por todos los vértices del polígono trasvasando, a cada paso, líquido de la barrica, no utilizada en el trasvase anterior, y sin variar el contenido de una de las barricas que se halla en estado límite.

La utilización geométrica consecutiva de la regla II, significa el paso de un vértice del polígono a otro contiguo y así sucesivamente. Estos vértices no son más de seis, por lo tanto, utilizando la regla II no más de seis veces, regresamos a una distribución ya conocida antes por nosotros.

Sí utilizando la regla I no damos en B y si B es diferente de los vértices del polígono (la utilización de la regla II no nos da B) entonces a continuación es preciso obrar de la siguiente forma.

III. Partiendo del punto A y también de las distribuciones correspondientes a cada vértice del polígono, se deben realizar trasvases que no conduzcan a distribuciones ya realizadas antes, hasta que sea posible o hasta conseguir la distribución de B. Al mismo tiempo, como es fácil ver, en el trasvase deben ser utilizadas una barrica que se halle en estado límite y una barrica no utilizada en el trasvase anterior.

Del resultado de los cálculos geométricos se deduce que, si esto es posible de hacer, el procedimiento es único (del punto A, algunas veces, se pueden trazar dos líneas quebradas, conforme al problema examinado). Si la utilización de la regla II no conduce a la distribución de B, entonces, esto significa que, mediante trasvases, el paso de A a B es imposible.

Capítulo 6
Cuentos e Historias Antiguos

60. Este problema se resuelve fácilmente si se comienza por el final, teniendo en cuenta que después del tercer paso resultó que el campesino tenía 24 kopeks, exactamente los que debía entregar.

En efecto, si después del último paso resultó que al campesino le quedaban exactamente 24 kopeks. Entonces, antes de este paso tenia 12 kopeks. Pero estos 12 kopeks le quedaron después de dar 24, o sea, en total tenia 36 kopeks. Por lo tanto, el segundo paso, el campesino lo emprendió teniendo 18 kopeks y ellos le quedaron después de pasar el puente por primera vez y dar al diablo 24 kopeks. Entonces, en total después de pasar por primera vez tenía 18 más 24 kopeks, o sea, 42 en total. De esto se desprende que, antes de pasar el puente por primera vez, el campesino tenía en su bolsillo 21 kopeks suyos.

¡Se equivocó el campesino! Como vemos, a consejo ajeno la reflexión propia no sobra.

61. El tercer campesino dejó para sus compañeros 8 patatas, o sea, 4 patatas para cada uno. El comió 4. Entonces, sucedió que el segundo campesino dejó a sus compañeros 12 patatas, o sea, 6 para cada uno. Él comió 6 patatas. Resulta pues que el primer campesino dejó a sus compañeros 18 patatas, o sea, 9 para cada uno, Él se comió 9.

Entonces, la dueña sirvió en total a la mesa 27 patatas lo que supone 9 para cada campesino. Pero el primer campesino se comió su parte. Por consiguiente, de las ocho patatas que quedaron, 3 pertenecen al segundo campesino y 5 al tercero.

62. Este problema es muy viejo y para muchos ya conocido.

Está claro que más ovejas tiene el primer pastor, Iván. ¿Pero cuántas ovejas tiene más que Piotr?

¿Si Iván da una oveja no a Piotr sino a otro cualquiera, entonces, tendrán los dos pastores la misma cantidad? ¡No! puesto que igual cantidad tendrían solamente en el caso que Iván diese una oveja a Piotr. Por lo tanto, si Iván da una oveja no a Piotr sino a un tercer pastor, de todas formas le quedarán más ovejas que a Piotr pero... ¿cuántas más? Está claro que una oveja más, puesto que si añadimos ahora una oveja al rebaño de Piotr, entonces, los dos pastores tendrán la misma cantidad. De esto se deduce, que mientras Iván no dé a nadie ninguna oveja, tendrá en su rebaño dos ovejas más que Piotr.

Ahora vamos a ver cuántas ovejas tiene el segundo pastor, Piotr. Conforme al cálculo anterior, debe tener dos ovejas menos que Iván, Entonces, si Piotr da una de sus ovejas no a Iván sino a otro cualquiera, resultará que Iván tiene tres ovejas más que Piotr. Pero sea que recibe esta oveja precisamente Iván y no otro cualquiera, Entonces, queda claro que Iván se hará con cuatro ovejas más que las que le quedan a Piotr.

Ahora bien, conforme a las condiciones del problema, en dicho caso, Iván se hará con el doble de ovejas que Piotr. Así, pues, cuatro es precisamente la cantidad de ovejas que le quedarían a Piotr si diese una a Iván, quién entonces tendría ocho ovejas. Así, antes de la supuesta entrega, Iván tenía 7 y Piotr 5 ovejas.

63. La perplejidad de las campesinas se explica al momento si reflexionamos que juntando sus manzanas y vendiéndolas de esta forma, sin ellas darse cuenta, las vendían a otro precio que antes de juntarlas,

Tomemos, por ejemplo, las dos últimas campesinas y veamos qué hicieron en realidad.

Mientras la primera y segunda campesina pensaban vender sus manzanas por separado, el precio de una manzana de la primera era medio kopek y el de la segunda, de un tercio de kopek. Cuando se unieron y comenzaron a vender cinco manzanas por 2 kopeks, el precio de cada manzana fue ya de 2/5 de kopek.

Entonces, la primera campesina vendió todas sus manzanas, no a medio kopek por unidad sino a 2/5 de kopek, con lo que perdió por cada manzana 1/10 de kopek

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{5-4}{10}=\frac{1}{10}\right)$$ (formula 3)

y, por consiguiente, de la venta de las treinta manzanas perdió 3 kopeks.
La segunda campesina, por el contrario, vendiendo las manzanas conjuntamente, ganaba por una de ellas 1/15 de kopek

$$\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6-5}{15}=\frac{1}{15}\right)$$ formula 4

y por las treinta manzanas, 2 kopeks,
La primera perdió 3 kopeks, la segunda ganó 2 kopeks. En total un kopek se perdió. Mediante los mismos razonamientos se halla con facilidad, por qué las dos primeras campesinas obtuvieron un kopek demás.

64. Los campesinos no sabían sumar quebrados debidamente. En efecto, súmense todas las partes en las que los campesinos querían dividir el hallazgo:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}$$ formula 5

Resulta que todos ellos en conjunto querían recibir menos dinero que el que encontraron (60/60). El dinero hallado, junto con el dinero que añadió el jinete, fue dividido en 60 partes; de ellas 57/60 recibieron los campesinos y con 3/60 ó 1/20 partes se quedó el jinete, Pero sabemos que el jinete se quedó con 3 rublos. Por lo tanto, 1/20 de todo el dinero corresponde a 3 rublos. O sea, la cantidad total de dinero era de 3 x 20 = 60 rublos. Carp recibió 1/4 parte, es decir, 15 rublos, pero si el jinete no pusiera su rublo, Carp debería recibir 25 kopeks menos o 15 rublos - 25 kopek = 14 rublos y 75 kopeks, lo que corresponde a 1/4 parte del dinero hallado, De lo expuesto se desprende que fueron hallados 14 rublos 75 kopeks x 4 = 59 rublos. Con el dinero del jinete resultaron 60 rublos; o sea, el jinete, efectivamente, metió en la bolsa 1 rublo. Colocó un rublo y se llevó 3: ganó 2 rublos haciendo un reparto inteligente.

¿Qué dinero fue el hallado en la bolsa?

Cinco billetes de 10 rublos, un billete de 5, uno de 3 y uno de 1 rublo. El jinete dio a Sidor 20 rublos: dos billetes de 10; a Carp, 15 rublos: un billete de 10 y otro de 5; a Pajóm, 12 rublos: un billete de 10 y dos de 1 rublo (uno el encontrado y otro el suyo); a Formá, el último billete de 10 rublos. Con el billete de tres rublos se quedó él.

65. El sabio obró con audacia, Temporalmente unió al rebaño su camello y con él resultaron 18 camellos. Una vez dividido este número conforme al testamento (el hermano mayor recibió 18 x 1/2 = 9 camellos, el mediano 18 x 1/3 = 6 camellos, el menor 18 x 1/9 = 2 camellos) el sabio se apoderó otra vez de su camello (9 + 6 + 2 + 1=18). El secreto, lo mismo que en el problema anterior, consiste en que las partes conforme el testamento deberían dividir el rebaño los hermanos, en suma no dan 1. En efecto,

$$1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18$$

66. Si la barrica está llena de agua exactamente hasta la mitad, entonces, inclinándola hasta tal punto que el nivel del agua llegue justamente al borde de la barrica, veremos que el nivel del agua llega también exactamente hasta el punto superior del fondo de la barrica (fig. 113 a).

Esto sucede por el hecho de que al trazamos un plano que pase por dos puntos diametralmente opuestos de los círculos superior e inferior de la barrica, este plano dividirá la barrica en dos partes iguales, Si la barrica está llena de agua menos de la mitad, entonces, inclinándola de la forma indicada, parte del fondo de la barrica quedará fuera del agua (fig. 133 b). Por último, si la barrica está llena de agua más de la mitad, entonces, al inclinarla, su fondo quedará cubierto por el agua (fig. 133 c).

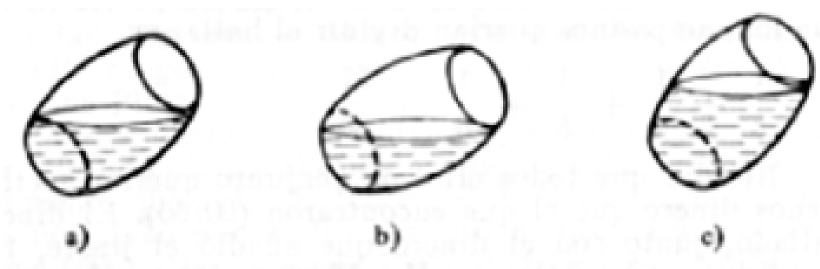
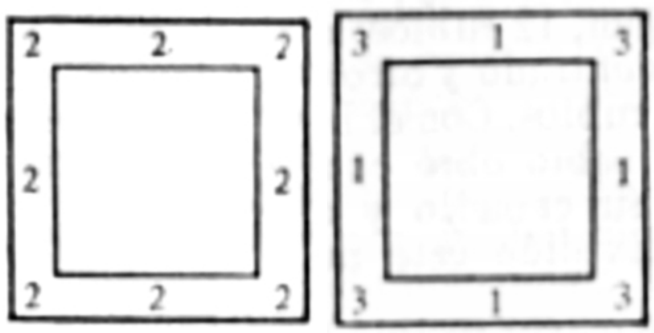


Figura 133

Razonando precisamente de esta forma el sirviente resolvió el problema.

67. Las soluciones se dan en las figs. 134 y 135.



Figuras 134 y 135

68. El criado cada vez tomaba una botella de cada sección lateral y de esas mismas secciones, para engañar al dueño después de cada hurto, añadía una botella a las secciones de los ángulos, De tal forma robó 4 veces por 4 botellas, o sea, en total 16 botellas. Esto queda claro examinando las figuras 136.

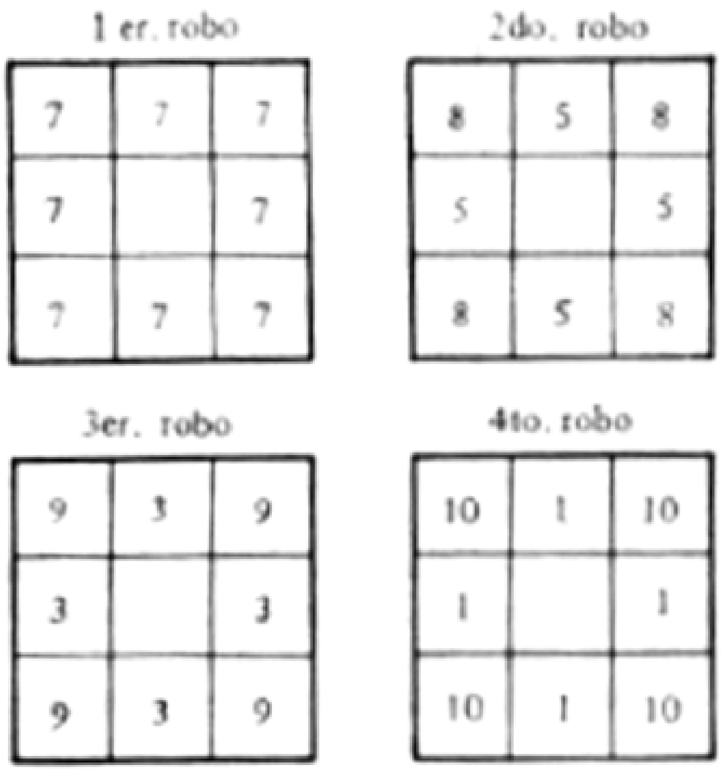


Figura 136

El criado podía disponer las botellas de otra forma, pero conservando siempre en la primera y tercera columnas del cuadrado la cantidad de 21 botellas en cada una. Por lo tanto, no pudo llevarse más de 60 – 2 x 21 =18 botellas, o sea, realizar más de cuatro hurtos.

69. En el primer caso, en la caverna quedaron 21 personas. Distribuirlas, conservando las condiciones de que a lo largo de cada pared haya 9 personas, se puede de muchas formas. Una de ellas se muestra en la fig. 137.

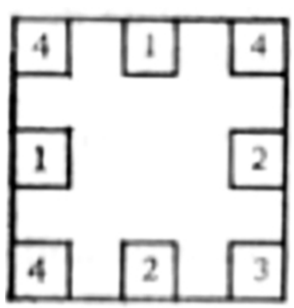


Figura 137

En el segundo caso era preciso distribuir 27 personas. Una de las soluciones posibles se da en la fig. 138.

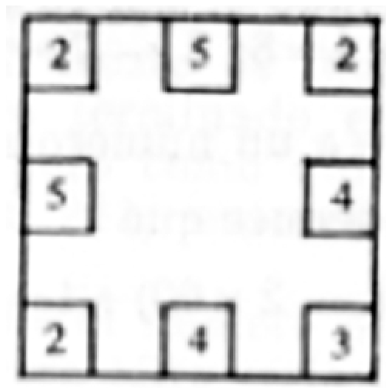


Figura 138

90. No es difícil comprender que el abuelo dio menos setas al tercer nieto que a los otros dos, puesto que éste, para tener la misma cantidad de setas que sus hermanos, debería recoger tantas setas cuantas recibió del abuelo. Para que la solución resulte más simple diremos que el abuelo dio al tercer nieto un puñado de setas.

¿Cuántos puñados dio entonces al cuarto nieto?

El tercer nieto trajo a casa 2 puñados, ya que él mismo encontró tantas setas cuantas le dio el abuelo. El cuarto nieto trajo a casa exactamente la misma cantidad de setas que el tercero, o sea, también dos puñados, pero perdió la mitad de sus setas por el camino, es decir, que el abuelo le dio 4 puñados.

El primer nieto trajo a casa 2 puñados, pero de ellos 2 setas encontró él mismo, o sea, el abuelo le dio dos puñados menos dos setas. El segundo nieto trajo a casa 2 puñados, pero por el camino perdió 2 setas, o esa, el abuelo le dio 2 montoncitos más dos setas.

Por lo tanto, el abuelo repartió entre sus nietos 1 puñado, mas 4, más 2 puñados sin dos setas, más 2 puñados con dos setas demás, en total 9 enteros (en dos faltaban 2 setas pero en los otros dos había dos setas demás). En 9 puñados iguales había 45 setas, entonces, en cada puñado se tenían 45 / 9 = 5 setas.

El tercer nieto recibió del abuelo 1 puñado, o sea, 5 setas; el cuarto, 4, es decir, 5 x 4 = 20 setas; el primero, 2 sin dos setas, o sea, (5 x 2) – 2 = 8 setas; el segundo, 2 montoncitos con dos setas demás, o sea (5 x 2) + 2 = 12 setas.

71, Es evidente que el problema se reduce al hallazgo de un número que sea divisible por 7 (es decir sin resto) y que, dividido por 2, 3, 4, 5 y 6, dé un resto igual a 1.

El número menor, que se divide sin resto por 2, 3, 4, 5 y 6 (mínimo común múltiplo de estos números,) es 60. Entonces, debemos hallar un número que sea divisible por 7 y que, al mismo tiempo, sea en una unidad mayor que un número divisible por 60. Este número se puede hallar realizando pruebas consecutivas: 60, dividido por 7 da de residuo 4, por lo tanto, 2 x 60 da de residuo una unidad (2 x 4 = 8; 8 – 7 = 1).

Entonces, 2 x 60 es igual a un número múltiplo de 7 + 1, de aquí se deduce que (7 x 60 – 2 x 60) + 1 es igual a un número múltiplo de 7, o sea, 5 x 60 + 1 es igual a un número múltiplo de 7,

$$5 \times 60 + 1 = 301$$

Por lo tanto, el menor número que resuelve el problema es 301. Es decir, la cantidad mínima de huevos que podía haber en la cesta es 301.

72, Por lo visto, aquí la cuestión radica en saber la hora exacta cuando Piotr regresó a su casa. El razonaba de la siguiente forma: "Doy cuerda a mi reloj y al irme miro qué hora marca, digamos, la hora a. Al llegar donde mi amigo, inmediatamente le pregunto qué hora es: supongamos que su reloj marca la hora b. Antes de irme otra vez miro qué hora marca su reloj, digamos que, en dicho momento, marca la hora c. Al llegar a casa, inmediatamente observo que mi reloj marca la hora d. Por estos datos me será más fácil determinar la hora exacta.

La diferencia [d – a] indica el tiempo de mi ausencia en casa. La diferencia [c – b], el tiempo que estuve con mi amigo, La diferencia [d – a] – [c – b] resultado de

restar el segundo tiempo del primero, me dará el tiempo que empleé en el camino. La mitad de éste, (b + d – a -c)/2, fue empleado en el camino de regreso.
Añadiendo esta mitad a c, tendré (b + c + d -a)/2; esta será la hora exacta en que regresé a casa"

73. Conforme a las condiciones, toda la suma obtenida, por lo visto, no supera 9997 rublos 28 kopeks. Por consiguiente, fueron vendidos no más de 999.728/4.936, o sea, no más de 202 trozos.
La última cifra del número desconocido de trozos debe ser tal, que multiplicada por 6 dé un producto cuya última cifra sea 8; tal cifra puede ser 3 u 8.
Supongamos que es 3. Entonces, el valor de tres trozos es igual a 14.808 kopeks. Sustrayendo este número de la suma recibida, debemos obtener un número que termine en 920.
Suponiendo que la última cifra es igual a 3, la anterior a ella puede ser 2 ó 7, ya que sólo estas cifras, multiplicadas por 6, dan un producto terminado en 2.
Supongamos que el número desconocido termina en 23. Sustrayendo el precio de 23 trozos de toda la suma recibida, obtenemos un número terminado en 200. La tercera cifra puede ser 2 ó 7, pero como quiera que el número desconocido no supera 202, entonces, nuestra suposición os incorrecta.
Si la suposición fuese de que el número desconocido termina en 73, entonces, la tercera cifra sería 4 ó 9; una suposición are también es incorrecta.
Por lo tanto, la última cifra no puede ser 3; queda la suposición que dicha cifra es 8.
Cálculos semejantes a los anteriores, demuestran que la segunda cifra puede ser 4 ó 9; de estas dos suposiciones solo la segunda puede ser correcta,
El problema tiene solamente una solución: la cantidad de trozos vendidos es 98, toda la suma obtenida es igual a 4837 rublos 28 kopeks.

74. Se debe comenzar a contar por el sexto soldado, sentado a la izquierda del dueño. En el segundo caso, por el quinto soldado, a la derecha del dueño.

75. Durante la ardorosa disputa el cochero no pudo hacerse una idea de cuán grande es la cantidad de aparejos que deberá realizar, Calculemos esa cantidad.

Designando los caballos mediante las cifras 1, 2, 3, 4, 5 debemos aclarar de cuantas formas o variantes se pueden disponer estas cinco cifras.

Dos cifras se pueden permutar de dos formas; (1, 2) y (2, 1), Las permutaciones (arreglos) en la disposición de tres cifras: 1, 2, 3, que comiencen con la cifra 1, pueden ser también dos. Pero este número de variantes no depende de cuál de las tres cifras fijadas está en primer lugar, o sea, en total la cantidad de permutaciones en la disposición de tres cifras puede ser 3 x 2 = 6;

123 132 213 231 312 321

Continuando, hallamos que con cuatro cifras, siendo fijada la primera, se pueden realizar 6 arreglos (variaciones) y que el conjunto de todos los arreglos de 4 cifras se divide en 4 grupos de 6 variantes cada uno, que comienzan por una su misma cifra: 1, 2, 3 ó 4. O sea, que todos, los arreglos serán 4 x 6 = 4 x 3 x 2 x 1 = 24.

De la misma forma, el conjunto de todos los arreglos de 5 cifras consta de 5 grupos cada uno de 24 variantes, que comienzan por una de las cifras 1, 2, 3, 4 ó 5. En total sería

5 x 24 = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 arreglos.

Se puede demostrar que el conjunto de arreglos para n cifras {1, 2, 3... n} es igual al producto de 1 x 2 x 3 x…, x n. Este número se designa por n!

Volvamos a nuestro problema. En total el cochero debería hacer 170 aparejos (cambios) de las caballerías. Si para cada uno de ellos necesitase sólo un minuto, entonces para realizar todos los aparejos necesitaría 2 horas. El cochero perdió la apuesta.

76. Si uno de loa varones compró, digamos x objetos entonces, conforme a las condiciones del problema, pagó por ellos x^2 kopeks. Si su mujer compró y objetos, entonces pagó por ellos y^2 kopeks. O sea, tenemos $x^2 - y^2 = 48$, o bien (x - y) * (x + y) = 48.

Los valores de x e y conforme a las condiciones son números enteros y positivos. Esto es posible sólo en el caso cuando (x − y) y (x + y) son pares, siendo (x − y) < (x + y).

Descomponiendo 48, en estos factores vemos que tenemos solo tres posibilidades de cumplir esta condición:

48 = 2 x 24 = 4 x 12 = 6 x 8

o bien

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = 2 \\ x_1 + y_1 = 24 \end{cases}$$ formula 6

$$\begin{cases} x_2 - y_2 = 4 \\ x_2 + y_2 = 12 \end{cases}$$ formula 7

$$\begin{cases} x_3 - y_3 = 6 \\ x_3 + y_3 = 8 \end{cases}$$ formula 8

Resolviendo estos sistemas de ecuaciones, hallamos que

$$x_1 = 13,\ y_1 = 11,\ x_2 = 8,\ y_2 = 4,\ x_3 = 7,\ y_3 = 1,$$

Buscando aquellos valores de x e y, cuya diferencia es igual a 9, hallamos que Iván compró 13 objetos y Ekaterina, 4. De la misma forma Piotr compró 8 objetos y Maria, 1. Así, pues, tenemos las siguientes parejas:

Iván 13	Piotr 8	Alexei 7
Anna 11	Ekaterina 4	María 1

Capítulo 8
Ejercicios con un Trozo de Papel

77. Poner sobre la mesa una hoja de papel de forma irregular y efectuar un doblez cerca de uno de sus bordes, Supongamos que esta dobladura es la línea recta XX' (fig. 139).

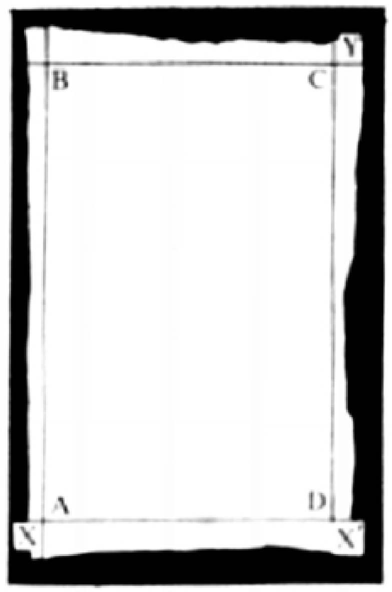


Figura 139

Cortar con un cortaplumas por la línea de la doladura y separar el trozo menor de la hoja de papel. De tal forma es obtendrá un borde rectilíneo, de la misma forma doblar la hoja de papel por la línea DY, procurando que el borde rectilíneo XX' se superponga exactamente. Al desenvolver después el papel se verá que el doblez DY forma un ángulo recto con el borde XX' puesto que una superposición demuestra que el ángulo YDX' es igual al ángulo YDK. Lo mismo que antes, pasar con el cortaplumas por la segunda dobladura y separar la parte innecesaria.

Si se repite el procedimiento indicado se obtendrán los bordes CB y BA. La superposición demuestra que los ángulos A, B, C y D son rectos e iguales entro sí y que los lados BC y CD son iguales a DA y AB, respectivamente. O sea, el trozo de papel obtenido ABCD (fig. 139) tiene la forma de un rectángulo. Una superposición demuestra las siguientes propiedades del mismo:

1. sus cuatro ángulos son rectos:
2. sus cuatro lados no son todos iguales
3. los dos lados más largos y los dos más cortos, son iguales entre sí.

78. Tomamos una hoja rectangular de papel A'D'CB la plegamos en diagonal, de tal forma que uno de los lados cortos, por ejemplo, el CB coincida con el lado largo BA', tal como se muestra en la fig. 140.

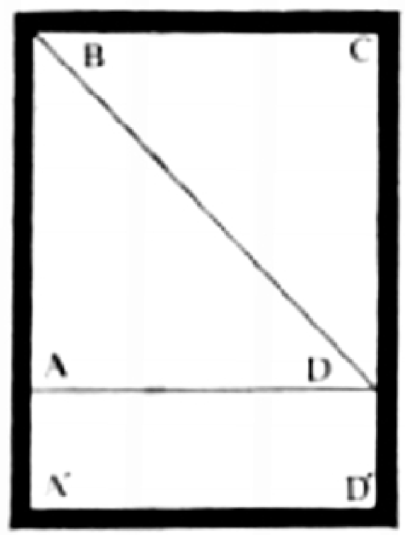


Figura 140

El ángulo B se sitúa en el borde BA', en el punto A; el extremo del doblez por el borde CD' se situará en el punto D., Después hacemos un doblez por los puntos A y D desdoblando por la recta AD la parte A'D'DA que sobresale. Desplegando después la hoja de papel obtenemos la figura ABCD, o sea, un cuadrado, cuyos ángulos son rectos y todos los lados iguales.

79. Tomamos una hoja de papel cuadrada y la doblamos en dos partes, de tal forma que los bordes de sus lados opuestos coincidan (fig. 141).

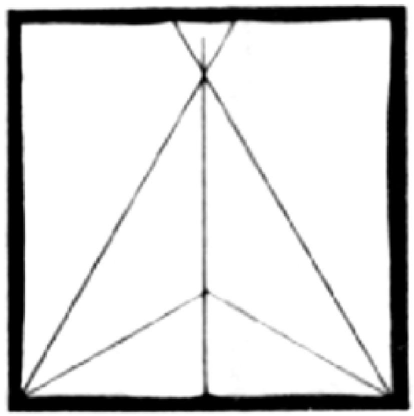


Figura 141

Resultará en una dobladura que pasa por el centro de los otros dos lados perpendiculares a ellos. En esta línea central del cuadrado tomarnos un punto cualquiera y hacemos dobladuras que pasen por este punto y por los ángulos del cuadrado, situados a ambos lados de la línea central. Obrando de esta forma obtenemos un triángulo isósceles, en cuya base yace uno de los lados del cuadrado. La línea central divide, naturalmente, el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos coincidentes si se superponen. Dicha línea divide también el ángulo del vértice del triángulo isósceles en dos partes iguales.

80. En la línea central de un cuadrado determinamos un punto, distanciado de dos vértices del cuadrado en una longitud igual a uno de sus lados, y hacemos un doblez como en el ejercicio anterior. En este caso obtenemos un triángulo equilátero (fig. 142).

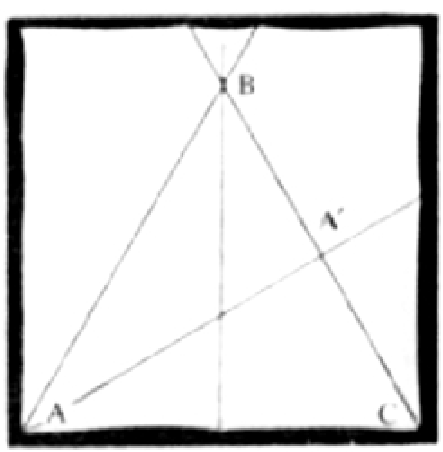


Figura 142

El punto necesario en la línea central del cuadrado, es fácil de hallar. Para ello es preciso doblar la base AC por AA', cerca de su extremo A, hasta que el otro extremo C no coincida con la línea central en el punto B.

81, Doblamos el cuadrado por el centro de los lados opuestos (fig. 143).

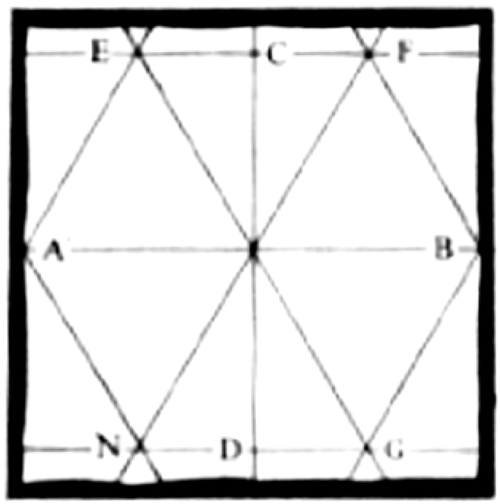


Figura 143

Obtenemos las líneas AOB y COD. En los dobleces AO y OB construimos, por el procedimiento ya conocido, los triángulos equiláteros AOF, AON, BOF, BOG.
Hacemos dobladuras por EF y NG.
El polígono AECFBGDN es un hexágono regular, lo que el lector podrá comprobar sin dificultad. La distancia máxima entre los puntos del polígono es, evidentemente, AB.

82. Tomamos un cuadrado y, por el procedimiento sabido, mediante dobladuras, inscribimos en él otro cuadrado (fig. 144).

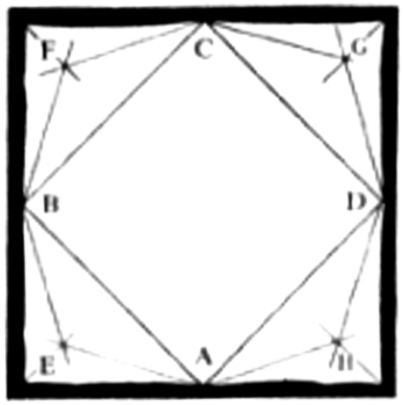


Figura 144

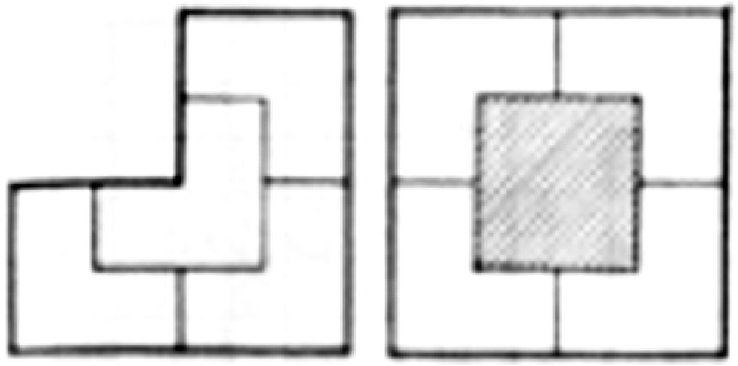
Dividimos en dos mitades los ángulos formados entre los lados de los cuadrados dado e inscrito. Sea que las dobladuras que dividen estos ángulos en mitades, es intersectan en los puntos E, F, G, y H.

El polígono obtenido AEBFCGDH es, precisamente, el octágono regular buscado. En efecto los triángulos ABF, BFC, CGD y DHA, inscritos en él, son isósceles y al ser superpuestos, coinciden. Por lo tanto, los lados del octágono obtenido son iguales.

Los ángulos del polígono AEBFCGDH también son iguales. En efecto, cada uno de los ángulos en los vértices E, F, G, H de los mismos triángulos, es vez y media mayor que el ángulo recto tomado, puesto que los ángulos en la base de estos triángulos son iguales a una cuarta parte de un ángulo recto. De lo expuesto queda claro que cada uno de los ángulos del octágono, en los puntos A, B, C y D también es una vez y media mayor que un ángulo recto, o sea, todos los ángulos del octógono son iguales entre sí.

El lado del cuadrado corresponde a la máxima distancia entre la puntos del octágono.

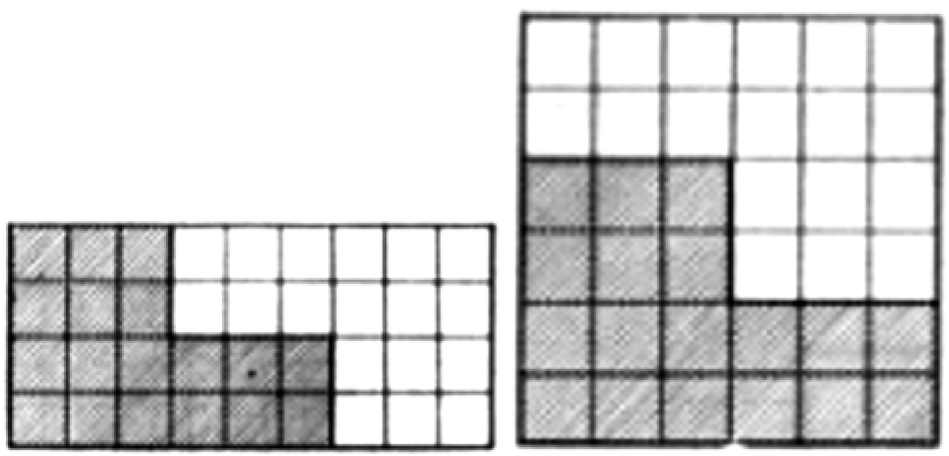
85. Para resolver este problema se puede utilizar una hoja de papel o de cartón (mejor si es cuadriculado). Se muestra la forma de hacer el corte necesario en las figs, 145 y 146.



Figuras 145 y 146

No es difícil comprobar que las cuatro figuras obtenidas de tres cuadrados, si se superponen, coinciden.

86. La solución de este problema se da en las figuras 147 y 148.



Figuras 147 y 148

No obstante a lo sencillo y fácil que es, requiere una explicación geométrica de que 4 x 9 = 6 x 6. Además, esta clase de problemas dan una excelente preparación para resolver problemas más complicados sobre la transformación de unas figuras en otras recortándolas en partes y disponiéndola en un orden determinado. Cualquiera que lo desee puede, por su cuenta, inventar muchos problemas semejantes.

87. La solución de este problema se ve por el dibujo adjunto (fig, 149).

Figura 149

Si extraemos la parte dentada A de le parte B y después la introducimos nuevamente entre los dientes de la parte D, pero desplazándola en un diente hacia lo derecha, nos resultará un rectángulo perfecto e incluso un cuadrado.

88. La solución del problema se da en la fig. 150

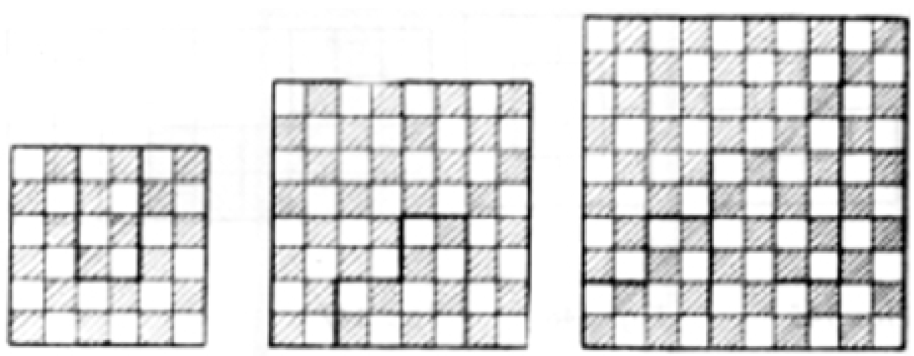


Figura 150

89. La solución se da en la fig. 151.

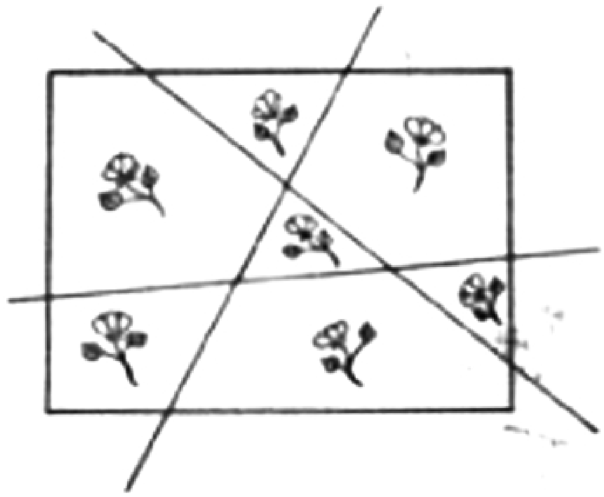


Figura 151

90.

1. Mediante líneas rectas, unimos los puntos medios de los lados del cuadrado con los vértices opuestos del mismo cuadrado;
2. de los mismos puntos medios de los lados del cuadrado trazamos otras líneas, paralelas a dos y perpendiculares a otras dos de las trazadas antes, hasta el punto de tangencia con una de dichas líneas, perpendicular a la que trazamos;
3. en los rectángulos, obtenidos de esta forma, trazamos una de sus diagonales y con ello, el cuadrado dado quedará dividido en 20 triángulos rectángulos, tal como se puede apreciar en la fig 152.

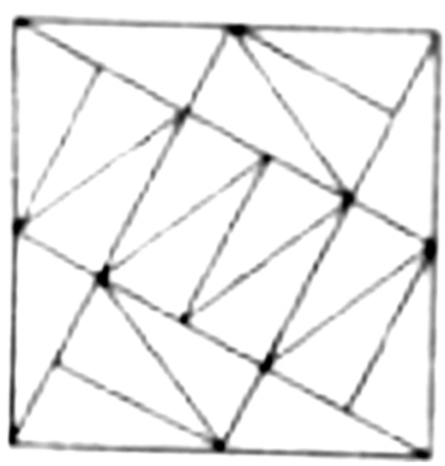


Figura 152

Tampoco es difícil demostrar que en los triángulos rectángulos obtenidos, uno de los catetos es dos veces mayor que el otro.

De los 20 triángulos obtenidos se pueden componer 5 cuadrados iguales (fig, 153).

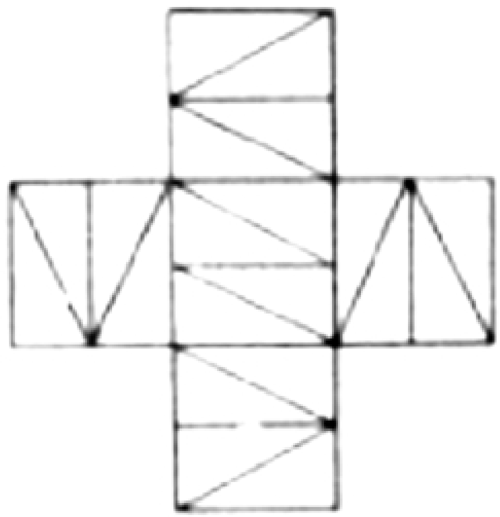
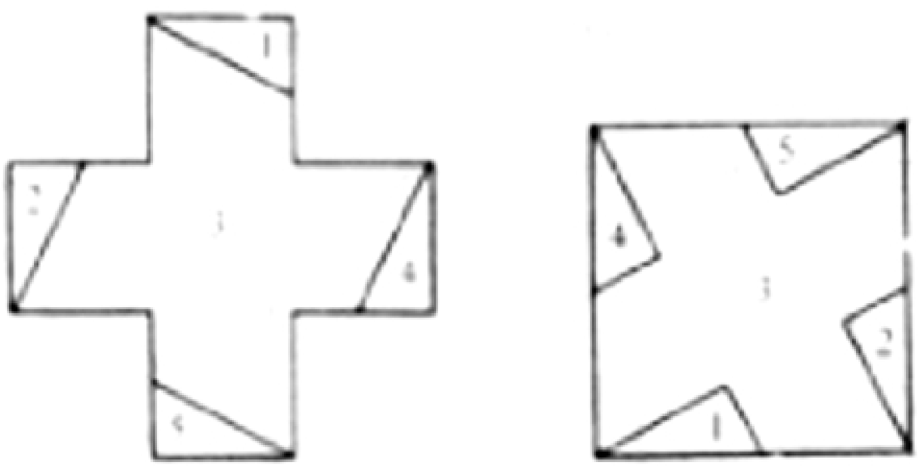


Figura 153

91. En las figs. 154 y 155 el lector hallará dos soluciones de este problema. La segunda solución es tan sencilla como ingeniosa: el problema se resuelve trazando solamente dos líneas rectas.



Figuras 154 y 155

92. Supongamos que ABCD (fig. 156) es el cuadrado dado.

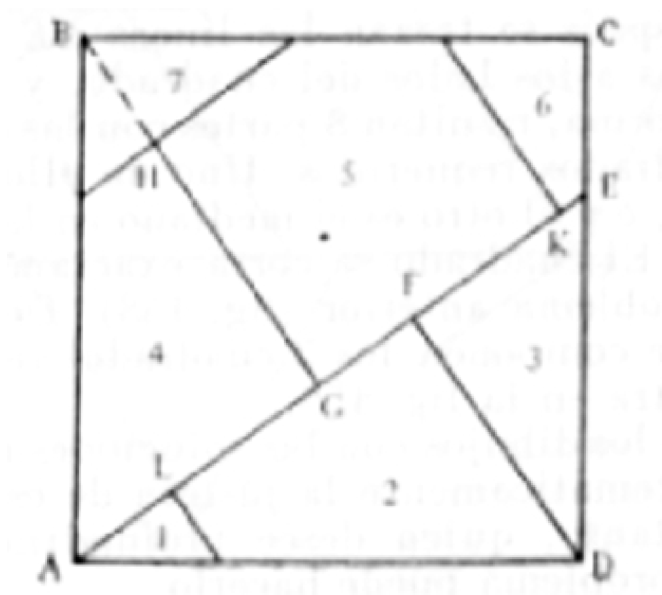


Figura 156

En uno de sus lados marcamos el segmento DE, igual a la mitad de la diagonal del cuadrado, Unimos A con B y bajamos a la recta obtenida AE las perpendiculares DF y BG. Después marcamos los segmentos GH, GK y FL, todos ellos iguales a DF; finalizamos la construcción trazando líneas paralelas o perpendiculares a DF, según se muestra es la fig. 156. Si ahora recortamos el cuadrado por las líneas trazadas y después juntamos todos los trozos, tal como se indica en la fig. 157, obtendremos los tres cuadrados necesarios.

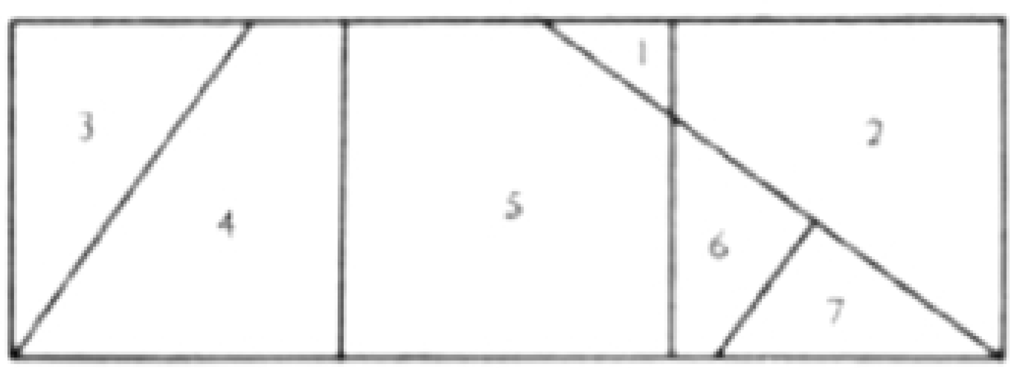


Figura 157

Le dejamos al lector la demostración matemática de este problema, hacemos únicamente la observación de que valiéndose de la semejanza de la triángulos y del teorema de Pitágoras demostrado en uno de los problemas anteriores, no será difícil determinar que

$$3\,|DF|^2 = |AB|^2$$

93. Por el dibujo adjunto (fig. 158) se ve cómo realizar los cortes en el cuadrado. Las rectas DF y GB y el punto L se determinan en la fig. 159.

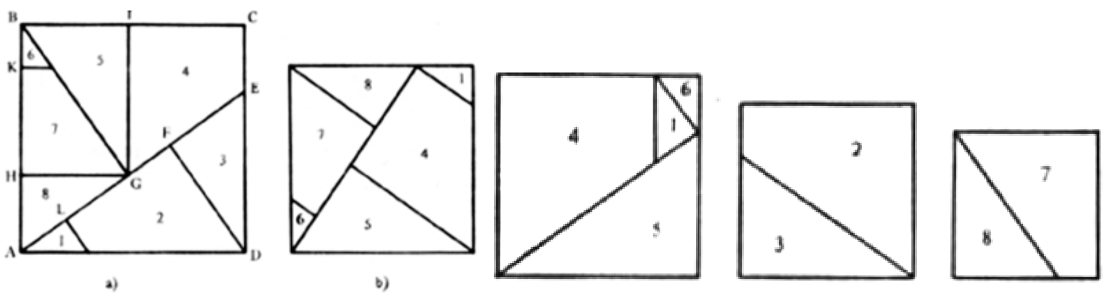


Figura 158 y 159

Por los dibujos con las soluciones no es difícil demostrar matemáticamente la justeza de estas construcciones, por lo tanto, quien desee profundizar en el contenido de este problema puede hacerlo.

95. Cortamos el hexágono primero por la diagonal y unimos las dos mitades obtenido de tal forma que conformen el paralelogramo ABFE (fig. 160).

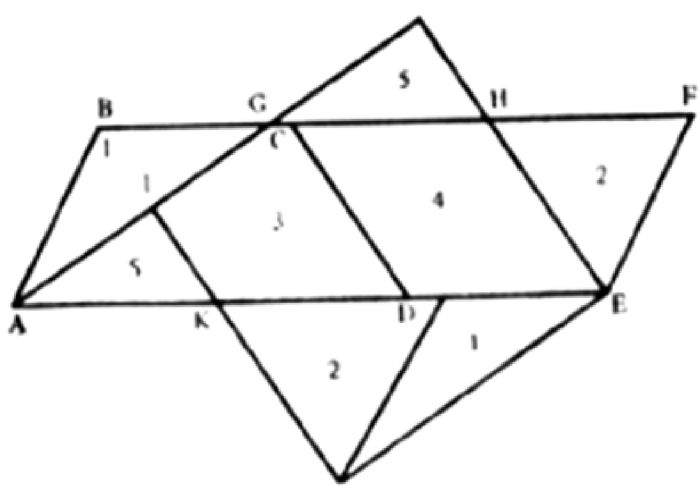


Figura 160

Del punto A, como centro, trazamos una circunferencia, cuyo radio es igual a la media proporcional entre la longitud AE y la altura del paralelogramo. Esta circunferencia corta el lado BF en el punto G. Después, del punto E bajamos la perpendicular EH, hasta la continuación de AG, y trazamos la recta IK, paralela a EH y a una distancia de ella igual a AG, De tal forma, el hexágono resulta cortado en 5 partes, con las cuales se puede formar un cuadrado, No damos más explicación de este problema, ya que está destinado a lectores con conocimientos sobre la geometría elemental en el plano.

Capítulo 8
Sofismas y Paradojas Geométricas

97. Es fácil ver que los triángulos A y B, obtenidos después de cortar el cuadrado, son iguales entre sí. También son iguales los trapecios C y D. La base menor de los trapecios y el cateto menor de los triángulos son iguales a 3 cm y, por lo tanto, deben coincidir al superponer el triángulo A al trapecio C y el triángulo B al trapecio D. ¿En qué consiste el secreto? No será difícil descubrirlo si examinamos la fig. 161.

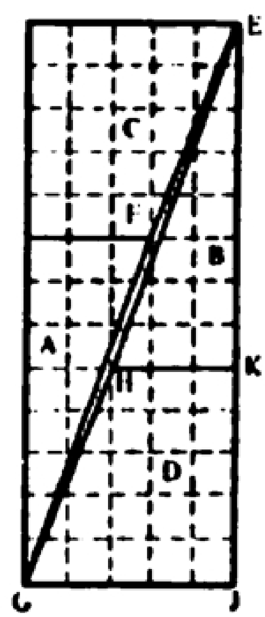


Figura 161

La cuestión consiste en que los puntos G, H y E no yacen es una misma recta, tg< EHK = 8/3 y tg < HGJ = 5/2. Ya que 8/3 -5/2 > 0, entonces <EHK> <HGJ.

La línea GHE no es recta, sino quebrada. Por la misma razón, la línea EFC también es quebrada. El área del rectángulo obtenido es realmente igual a 65 cm2, pero en él hay una abertura en forma de paralelogramo, cuya área es exactamente igual a 1 cm^2. Como es fácil ver, la anchura máxima de esta abertura es de 5 - 3 - (5 x 3)/8 = 1/8 centímetros. Resulta pues, que el pícaro carpintero, de todas formas, tuvo que enmasillar una pequeña rendija para hacer reparación completa.

De las mismas partes A, B, C y D se puede componer otra figura más (fig. 162). El polígono KLGMNOFP puede ser descompuesto en dos rectángulos de 5 x 6 cm^2 y un rectángulo pequeño de 3 x 1 cm^2. Por lo tanto, el área total del polígono igual a 2 x 30 cm^2 + 3 cm^2 = 63 cm^2. Pero sabemos que dicho polígono está compuesto por las partes A, B, C y D, cuya área total es igual a 64 cm^2. La adivinanza de este sofisma una vez más consiste en que los puntos E, F, G y H no yacen en una línea recta. El examen minucioso de este caso, se lo dejamos el lector.

98. La cuestión radica en que el triángulo rectángulo pequeño no es isósceles. Uno de sus catetos es igual a 1 cm, el otro, como es fácil determinar, igual a 8/7 cm,

La longitud de la base del rectángulo es igual no a 9, sino a 8 cm + 8/7 cm = 9 1/7 cm; su área es de 7 cm x 9 1/7 cm = 64 cm^2 La contradicción, por lo tanto, no existe.

99. Un examen más detallado de cómo la diagonal cruza las casillas del rectángulo (fig. 54) demuestra que VRXS no es un cuadrado. Esto se puede confirmar haciendo los siguientes cálculos.

De los triángulos semejantes PQR y TQX, tenemos PR : QR = TX : QX y PR = TX x QR/QX = 11 x 1 / 13 = 11/13. Entonces, los lados del rectángulo VRXS con iguales a 12 cm y 11 11/13 cm, su área es igual a 12 cm x 11 11/13 cm = 142 2/13 cm^2. El área del triángulo STU es igual al área del triángulo PQR, o sea, 1/2 x 1 cm x 11/13 cm = 11/26 cm^2. De tal forma, el área de la figura es igual a 142 2/13 cm^2 + 2 11/26 cm^2 = 143 cm^2.

100. El "sentido común" nos induce a la siguiente respuesta: "¡Claro que entre la naranja y el aro se formará mayor espacio que entre la tierra y el aro! Puesto que en comparación con el perímetro de la tierra (40.000 km) un solo metro supone una magnitud tan insignificante que su añadidura pasará completamente desapercibida. Otra cosa es una naranja: en comparación con sus dimensiones, un metro es una magnitud enorme y si se agrega al perímetro de la naranja será muy perceptible".

No obstante, comprobemos nuestra deducción mediante una a serie de cálculos. Sea el perímetro del globo terrestre igual a C y el perímetro de la naranja, a c metros.

Entonces, el radio de la Tierra será R = C/2π y el de la naranja, r= c/2π. Después de añadir a los aros un metro, el perímetro del aro que ciñe la Tierra será C+1 y el del aro que ciñe la naranja c + 1, sus radios serán respectivamente (C + 1)/2 π y (c + 1)/2 π. Si de los nuevos sustraemos los anteriores, obtendremos en ambos casos un mismo incremento

$$\frac{C+1}{2\pi}-\frac{C}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}$$ para la Tierra formula 9

$$\frac{c+1}{2\pi}-\frac{c}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}$$ para la naranja formula 10

O sea, en el caso de la Tierra y de la naranja el espacio formado será el mismo, 1/2π, es decir, aproximadamente, 16 cm. Un resultado tan sorprendente es debido a la

Constancia de la relación entre el perímetro de cualquier circunferencia y su radio.

Capítulo 11
Acertijos de Números

101. Aquí no hay ninguna clase de truco, lo que sí hay es un cálculo matemático correcto.

Para llegar de 5 a 9 se debe contar así: 5, 6, 7, 8, 9. Entonces, para llegar de 9 a 5, se debe pasar por los mismos números, 9, 8, 7, 6, 5 pero en orden inverso. Si indicando el 9, decimos "cinco", después, indicando el 8, decimos "seis" y así sucesivamente, entonces llegando al número penado o sea, al 5, decimos "nueve". Si yendo después por el círculo por la misma dirección añadiendo a "nueve" otros 12 números en orden consecutivo, llegaremos otra vez al mismo número 5. Por lo tanto, la cuestión se reduce a una cuenta, yendo por el círculo en dirección contraria al número indicado 9, hasta 9 + 12, o sea, hasta 21.

Si por el contrario, el número pensado es 9 y el indicado es el 5, entonces, de 9 a 5, contando en dirección directa yendo por el circulo en orden creciente de los números) tendremos: 9, 10, 11, 12,12 + 1, 12 + 2, 12 + 3, 12 + 4, 12+5 o sea 17. Por lo tanto, comenzando por el 5 se puede llegar al número pensado, 9 yendo en dirección inversa y contando los mismos 5 + 12 = 17 números.

102. Supongamos que vuestro compañero tiene en cada mano n cerillas (siendo n >= b) y que se le propone pasar de la mano derecha a la izquierda a cerillas (a < n). Entonces, hasta el momento en que pasó las cerillas de una mano a otra, en cada mano tenía n cerillas; después del primer traspaso, en la mano izquierda tenía n + a cerillas y n – a cerillas en la derecha; después del segundo traspaso, en la mano izquierda tenía (n + a) – (n –a) = 2a cerillas y en la mano derecha (n – a) cerillas y, por último, en la mano izquierda le quedan 2a cerillas y en la mano derecha ninguna.

103. El número de dos cifras puede ser presentado como 10a + b, donde 0 < a <= 9 y 0 < b <= 9, la cantidad de unidades.

La diferencia tiene la siguiente forma: 10a + b – (10b + a) = 9 (a – b), es decir, es divisible por 9. Si esta diferencia es igual a 10k + l (k, l <= 9), entonces 10k + l = 9k + (k + l) y por lo tanto, k + l = 9. O sea, la primera cifra de la diferencia se halla sustrayendo de 9 la última cifra que le comunican a usted.

Por ejemplo, si se ha pensado en el número 37, entonces tendremos 73 – 37 = 36. El que pensó el número le comunica la última cifra de la diferencia, o sea, 6. Usted hallará la primera: 9 – 6 = 3.

Un ejemplo más: 54 – 45 = 9. La última cifra es 9, entonces, la primera será 9 – 9 = 0, o sea la diferencia es igual a 9.

104. El cociente es igual a la diferencia, indicada por usted, entre las cifras extremas del número escrito, multiplicada por 11. Por ejemplo, si el número escrito es 845, entonces,

$$845 - 548 = 279$$

$$279 : 9 = 33 = (8 - 5) \times 11.$$

Para demostrar esta regla, observemos que cada número de tres cifras se puede presentar de de la forma 100a + 10b + c, siendo $0<a<=9$ la cantidad de centenas, $b<=9$ la cantidad de decenas y $x<=9$, la cantidad de unidades.

El número con estas mismas cifras, pero en orden contrario, será: 100c + 10b + a. Sustrayendo el segundo número del primero y dividiendo el resultado por 9, tendremos:

$$(100a + 10b + c - (100c + 10b + a)/9 = 99(a - c)/9 = 11 (a - c)$$

105. Por la solución del problema anterior sabemos que la diferencia entre cualquier número de tres cifras y el número obtenido cambiando de lugar las cifras extremas, siempre es divisible por 99. Como quiera que las cifras extremas se diferencian en más de una unidad, esta diferencia, obligatoriamente, será un número de tres cifras, que puede ser expresado de la siguiente forma:

$$100k + 10l + m \text{ con } (0<k<=9, m<=9),$$

entonces tendremos,

$$100k + 10l + m = 99k + (10l + m + k).$$

Puesto que la diferencia es divisible por 99, entonces, la igualdad dada demuestra que, obligatoriamente, $10l + m + k = 99$, de esto se deduce que $l = 9$ y $m + k = 9$. El número obtenido mediante la permutación de las cifras extremas se expresa de la forma

$$100m + 10l + k$$

y la suma es igual a

$$\begin{gathered} 100k + 10l + m + 100m + 10l + k = \\ =100(k + m) + 20l + (m + k) = \\ = 100 \times 9 +20 \times 9 +9 = \\ = 1089. \end{gathered}$$

106. Con el número pensado n se realizan las siguientes operaciones:

$$\begin{gathered} n \times 2+ 5 = 2n + 5 \\ (2n +5) \times 5 = 10n + 25 \\ 10n + 25 + 10 = 10n + 35 \\ (10n + 36) \times 10 = 100n + 350 \\ 100n + 350 - 350 = 100n \\ 100n/100 = n \end{gathered}$$

O sea, siempre se obtiene el número pensado. Examinando la resolución de este problema, no es difícil ver que puede tener cualquier número de modificaciones, Así por ejemplo, si se quiere que en el resultado el número de centenas siempre exprese el número pensado y que siempre sea preciso multiplicar todo por 2, 6 y 10, pero sustraer no 350 como en problema expuesto, sino otra cifra, entonces, deberá tenerse en cuenta cómo resultó en este problema el número 350. Este número resultó de la siguiente forma: se sumó 5 y es multiplicó por 5,

En total 25: a este número se le añadió 10, resultó 35: multiplicando este último número por 10, obtenemos 350. Por lo tanto, si se quiere sustraer del resultado final, en lugar de 350 otro número, entonces se solicita sumar no 5 y 10, sino otros números. Pedimos, por ejemplo, en lugar de 5 añadir 4 y en lugar de 10 añadir 12,

En este caso, es evidente que del último número obtenido deberemos sustraer 320 (4 x 5 = 20; 20 + 12 = 32; 32 x 10 = 320) y entonces, obtendremos un residuo, cuya cantidad de centenas nos dará el número pensado.

De tal forma, estos problemas se pueden variar infinitamente.

Del memo modo, es fácil ver que multiplicando el número pensado por 2, por 5 y por 10, de hecho, lo multiplicamos por 100 (2 x 5 x 10 = 100).

Por consiguiente, si de todas formas queremos que la cantidad de centenas en el resultado final indique el número pensado, lo mismo da qué factores elegir; lo principal es que el resultado de la multiplicación por esos factores dé el resultado final multiplicado por 100. De esto se deduce que conservando los mismos factores 2, 5 y 10, es puede variar su orden, es decir, primero multiplicar, digamos, por 5, después por 10 y finalmente por 2, etc.

En lugar de los lectores 2. 5 y 10 se pueden tomar otros, que den multiplicados 100, por ejemplo: 5, 4, 5 o bien 2, 2, 25 u otros cualesquiera. Pero, vale recordar que a estos cambios de factores y números que añadimos, corresponde el cambio del número que, al fin y al cabo, debemos hallar. Así, por ejemplo, vamos a multiplicar por 5, 4, 5 y añadir los números 6 y 9 y supongamos que el número pensado es el 8.

Multiplicando por 5, obtenemos 40; sumando 6, obtenemos 40 + 6 = 46; multiplicando por 4, obtenemos 160 + 24 = 184; sumando 9 obtenernos 160 + 33 = 293: multiplicando este número por 5, obtenemos 800 + 165=965, es decir, para obtener una cantidad de centenas, que correspondan al número pensado, en este caso, es preciso sustraer 165 (6 x 4 = 24, 24 + 9 = 33, 33 x 5 = 165).

También se puede tomar en lugar de 100, otro número cualquiera y obrar de tal forma que este número esté contenido en el residuo de la última sustracción, tantas veces, cuantas unidades contiene el número pensado. Por ejemplo, tomamos el número 24, que puede ser expresado por los factores 2, 3, 4 (2 x 3 x 4 = 24) y sean los números a sumar 7 y 8.

Supongamos que el número pensado es el 5. Entonces, duplicándolo obtenemos 10, sumando 7, tememos 10 + 7 = 17; triplicando hallamos (10 + 7) x 3 = 30 + 21 = 51; sumando 8, obtenemos 30 + 29 = 59; multiplicando el último número por 4, obtenemos 120 + 116 = 236, Sustrayendo de este número 116, nos quedan 120. En este último, el número 24 a contenido 5 veces, o sea, nos resulta 5 que es, precisamente, el número pensado.

Se pueden también tomar dos factores, en lugar de tres y, en lugar de dos números, añadir solamente uno, entonces, la cantidad de decenas que contiene el número obtenido después de realizar las operaciones aritméticas conforme a los ejemplos anteriores, nos dará el número pensado.

Se pueden tomar cuatro, cinco, seis, etc. factores, sumar una cantidad correspondiente de cifras (tres, cuatro, etc.), después, obrando como en los casos anteriores, averiguar el número pensado.

Claro está, que en lugar de sumar cifras se pueden restar y al final, en lugar de sustraer, sumar el número conocido. Así, por ejemplo, valiéndonos de las cifras, dadas en el primer ejemplo y considerando que el número pensado es el 12 tenemos: duplicando el número pensado, obtenemos 24; sustrayendo del resultado 5, tendremos 24 - 5; multiplicando por 5, nos queda 120 - 25; sustrayendo 20, resulta 120 - 35; multiplicando por 10, obtenemos 1200 - 350. En este caso, en lugar de sustraer es preciso sumar 350 y, entonces, resulta 1200, o sea, un número, cuya cantidad de centenas (12) corresponde al número pensado.

En una palabra, el lector puede variar y cambiar la forma de a los problemas a su gusto.

107. A primera vista el secreto de la adivinanza parece ser simple: prestar atención a las cifras inscritas en el último renglón. Si las dices, por ejemplo, que
el número pensado está inscrito en la 2ª, 3ª y 5ª columnas, contando de derecha a izquierda (o en la 2ª, 3ª y 5ª varillas del abanico) entonces, sume los números inscritos en el último renglón de estas columnas, y obtendrá 22 (2 + 4 + 16) y se convencerá de que fue pensado precisamente éste y no otro número.

Otro ejemplo, el número 18. Lo hallará en la 2ª y 5ª columnas. En el último renglón de estas columnas están inscritos los números 2 y 16, cuya suma da 18.

¿Cómo, pues, componer una tabla semejante?

Si escribimos una serie de números, comenzando por 1, tales que cada uno de ellos sea dos veces mayor que el anterior, es decir, 1, 2, 4, 8, 16, 32..., entonces, esta serie tendrá una propiedad admirable, que consiste en que cada número entero positivo puede ser obtenido mediante no más de un procedimiento, o sea, como resaltado de la suma de ciertos términos de esta serie.

Por ejemplo, 27 = 16 + 8 + 2 + 1. Para componer la tabla hemos tomado solamente los términos iniciales de la serie: 1, 2, 4, 8, la (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4) cuya suma puede darnos todos los números de 1 a 31 (= 2^5 - 1).

A cada uno de ellos se encuentra vinculada una columna de la tabla (véase el último renglón). Aprovechando la propiedad sobre la serie de potencias del dos antes indicada, inscribimos cada número entero en aquellas columnas, en cuya base (último renglón) se hallan las potencias del dos y cuya suma nos da este número. Así, el número 27 deberá ser inscrito en las columnas con las potencias en la base 1, 2, 8, 16. Ahora queda claro, por qué para averiguar es suficiente sumar los números, inscritos en la base de cada columna. Se puede aprovechar esta propiedad de las potencias del dos para designar números. Escribimos para este número una sucesión de 0 y 1 , tal que en el primer puesto a la derecha tengamos 1 ó 0 en dependencia si está inscrito este número en la primera columna de la tabla o no; en el segundo puesto, lo mismo, 1,ó 0 en dependencia si está inscrito nuestro número en la segunda columna y así sucesivamente. Por ejemplo, el número 27 se expresa mediante este procedimiento, de la siguiente forma: 10111: el número 12 así, 01100. Acordamos no escribir los ceros, situados a la izquierda, entonces, para el número 12 obtenemos la expresión 1100.

Este procedimiento de inscripción se llama sistema binario de representación de los números.

Para representar un número por este procedimiento, no es imprescindible tener la tabla a la vista. Basta con expresar un número entero en forma de suma de las potencias del dos y en los lugares cuyos números (contando de derecha a izquierda, comenzando por el 0) intervienen en esta representación, escribir 1 y en los puestos restantes, 0:

Número	Representación binaria
$2 = 2^1$	10
$3 = 2^1 + 2^0$	11
$5 = 2^2 + 2^0$	101
$19 = 2^4 + 2^1 + 2^0$	10010
$134 = 2^7 + 2^2 + 2^1$ etc.	10000110 etc.

El sistema binario es muy cómodo para representar números en las computadoras, ya que para escribir (representar) cualquier número, basta con dos signos, 0, 1. Mientras que en el sistema decimal, para ello sería necesario, 10 signos: 0, 1, 2, …9.

108. Si se ha pensado el número par 2n, entonces realizando con él la sucesión de operaciones indicadas, obtenemos

$$2n \times 3 = 6n,\ 6n/2 = 3n,\ 3n \times 3 = 9n,\ 9n/9 = n$$

Duplicando el cociente n, obtenemos el número pensado, 2n.
Comprobemos la regla para el hallazgo del número pensado en el caso general. Si se ha pensado un número par, la comprobación ya está hecha. Ahora supongamos que el número pensado es impar, 2n + 1. Entonces

$$(2n + 1) \times 3 = 6n + 3$$

Puesto que este número no es divisible por 2, entonces, sumando 1, hallamos que 6n +3 + 1 = 6n + 4. Dividiendo este número por 2, obtenemos 3n + 2. Luego (3n + 2) x 3 = 9n + 6.
El cociente de la división de 9n + 6 por 9 es igual a n (el resto es igual a 6). Duplicando este cociente y añadiendo 1, hallamos el número pensado 2n+1.

109. Cualquier número puede ser representado en una de las siguientes formas: 4n, 4n + 1, 4n + 2 4n + 3, donde la letra n deberá tener las valores 0, 1, 2, 3,4, etc.

1) Tomamos primero el número 4n y realizamos con él las operaciones antes indicadas. Obtenemos:

$$4n \times 3 = 12n,$$
$$12n/2 = 6n$$
$$6n \times 3 = 18n$$
$$18n / 2 = 9n$$
$$9n / 9 = n$$
$$4 \times n = 4n$$

2) para el número 4n + 1, tenemos

$$(4n + 1) \times 3 = 12n + 3,$$
$$(12n + 3 + 1)/2 = 6n + 2$$
$$(6n + 2) \times 3 = 18n + 6$$
$$(18n + 6) / 2 = 9n + 3$$
$$9n / 9 = n$$

El cociente de la división de 9n + 3 por 9 es igual a n, valiéndonos de la regla averiguamos el número 4n+1.

3) Para un número pie la forma 4n + 2, tenemos

$$(4n + 2) \times 3 = 12n + 6,$$
$$(12n + 6)/2 = 6n + 3$$
$$(6n + 3) \times 3 = 18n + 9$$
$$(18n + 9 + 1) / 2 = 9n + 5$$

El cociente de la división de 9n+5 por 9 es igual a n, añadiendo a 4n la cifra 2 (la división sin resto no se cumplía sólo la segunda vez) obtenemos el número pensado

4) Para el número de la forma 4a+3, tenemos

$$(4n + 3) \times 3 = 12n + 9,$$
$$(12n + 9 + 1)/2 = 6n + 5$$
$$(6n + 5) \times 3 = 18n + 15$$

$$(18n + 15 + 1) / 2 = 9n + 8$$

El cociente de la división de 9n + 8 por 9 es igual a n. Obrando con él conforme se indica en las condiciones, obtenemos el número pensado 4n + 3.
Así pues, siempre resulta el número pensado.

111. Dirigiéndonos a la solución del problema 109, hallamos que para los números de la forma 4n, el resultado final del cálculo nos da 9n, o sea, un número múltiplo de 9. Por consiguiente, la suma de las cifras de este número debe dividirse por 9 y, por lo tanto, deducimos que la cifra, para nosotros desconocida, es tal que sumándola con lea demás cifras conocidas, debemos obtener un número divisible por n (o sea, múltiplo de 9). Si la suma de las cifras conocidas a múltiplo de 9, entonces, la cifra desconocida también es 9, ya que por las condiciones sabemos que no es cero.
Para números de la forma 4n + 1 el resultado de los cálculos es 9n + 3, añadiéndole 6, obtenemos un número múltiplo de 9, o sea, es múltiplo de 9 también la suma de sus cifras.
Para números de la forma 4n + 2 el resaltado de los cálculos es 9n + 5; añadiendo 4, obtenemos un número múltiplo de 9, por lo tanto, también la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 9.
Por último, para números de la forma 4n + 3 el resultado final de los cálculos nos da 9n+8. Añadiendo 1, hallamos un número múltiplo de 9. La suma de sus cifras también deberá ser múltiplo de 9.
En resumen, las reglas antes indicadas son correctas.

112. SI con cualquiera que sea número n se realiza una serie de multiplicaciones y divisiones, se obtiene un resultado de la forma

$$n\frac{abc...}{ghk...}$$

Si realizamos las mismas operaciones con el número p, obtenemos un resultado

De la forma

$$p\frac{abc...}{ghk...}$$

Ambos resultados, divididos el primero por n y el segundo por p, nos darán, lógicamente, un mismo número $\frac{abc...}{ghk...}$. O sea, conociendo el número $\frac{abc...}{ghk...}$ y la suma $\frac{abc...}{ghk...}+n$, basta con sustraer el primero del segundo para obtener el número n.

Está claro que este problema se puede presentar de diversas formas, ya que, en primer lugar, se puede dividir y multiplicar por cualesquiera números y, en segundo lugar, en vez de multiplicar y dividir alternativamente, se puede primero multiplicar dos, tres, etc. veces consecutivas y luego otras tantas veces dividir, o viceversa. Sabiendo el último cociente también se puede cambiar la suma por resta, si es que el número pensado resulta menor que el último cociente obtenido, o utilizar otras variantes.

113.

I. Supongamos que los números pensados sola a, b, c, d, e. Tenemos dadas las sumas a + b, b + c, c + d, d + e, e + a. Adicionando las sumas que ocupan lugares impares, obtendremos a+ b + c + d + e + a y adicionando las que ocupan lugares pares, b + c + d +e.

Sustrayendo de la primera adición la segunda, obtenemos 2a. La mitad de esta cantidad corresponde al primero de los números pensados, a. Sustrayendo a de a + b, hallaremos b y así sucesivamente.

II. Supongamos que los números pensados son a, b, c, d, e, f. Tenemos dadas las sumas a + b, b + c, c + d, d + e, e + f, f + b. Las sumas que ocupan lugares impares, a excepción de la primera, nos dan c + d + e + f. Las sumas que ocupan lugares pares, nos dan b + c + d + e + f + b. La diferencia entre esta ultima adición y la anterior es igual a 2b; la mitad de esta cantidad corresponde al segundo número pensado, b. Los otros números son ya fáciles de hallar.

Estos problemas también se pueden resolver mediante otros procedimientos, de los cuales indicaremos los siguientes.

Supongamos que la cantidad de números pensados es impar.

Adicionando todas las sumas dadas y dividiendo el resultado obtenido en dos mitades, hallamos la suma de todos les números pensados. Si se ha pensado una cantidad par de números, entonces, adicionamos todas las sumas dadas, menos la primera, el resultado lo dividimos en dos mitades y obtenemos la suma de todos los números pensados, menos el primero. En este caso, sabiendo cual es la suma de todos los números pensados, es fácil hallar cada número por separado. Supongamos, por ejemplo, que se han pensado los números 2, 3, 4, 5, 6. Entonces, las sumas dadas son: 5, 7, 9, 11, 8. Sumando estos números obtenemos 40. La mitad de éste último (20) es, precisamente, la suma de todos los números pensados.

Sabiendo ahora que la suma del 2° y 3° números pensados es 7 y que la suma del 4° y 5° números es 11, sustraemos 7 + 11 = 18 de 20 y obtenemos el primer número pensado 2, y así sucesivamente.

De la misma forma se debe obrar en aquellos casos cuando la cantidad de números pensados es par.

Se pueden averiguar los números también de la forma siguiente. Si alguien pensó 3 números, pedirle que comunique el resultado de las somas de dos en dos números conforme fue explicado antes, si pensó 4 números, solicitarle sumarlos de tres en tres y que comunique cada suma; si pensó 5 números, pedirle que los sume de cuatro en cuatro y que diga cada suma, y así sucesivamente. A continuación, para averiguar los números pensados, es preciso atenerse a la siguiente regla general.

Todas las sumas conocidas se deben adicionar y luego dividir el resultado de la adición por un número en una unidad menor que la cantidad de números pensadas. El cociente obtenido corresponde a la suma de todos los números pensados. Después de esto, ya no es difícil hallar cada número por separado. Supongamos, por ejemplo, que se han pensado los números 3, 5, 6, 8. Las sumas de tres en tres números serán 3 + 5 + 6 = 14; 5 + 6 + 8 = 19; 6 + 8 + 3 = 17; 8 + 3 + 5 = 16.

Adicionando todos los resultados de estas sumas, obtenemos 66. Dividiendo este último resultado por 3 (es decir, por un número. en una unidad menor que la cantidad de números pensados) obtenemos 22, lo que corresponde a la suma de todos los números pensados. Si, ahora sustraemos 14 de 22, obtenemos el último número pensado (8); sustrayendo 19, hallemos el primero (3) y así sucesivamente. Comprender y demostrar este procedimiento no es difícil.
Le dejamos el lector la demostración de que el caso cuando la cantidad de números pensados es impar no se pueden tomar las sumas de estos números por pares, de tal forma que la última suma está compuesta por el último y primero números pensados, sino que obligatoriamente se deben sumar el último y segundo números pensados.

114. Las operaciones que en este caso se realizan con el número pensado n se pueden expresar de la siguiente forma: (na + b)/c, a su vez, esta expresión se puede representar de la forma na/c + b/c. Es evidente que sustrayendo n(a/c), obtenemos de reato b/c.

115. El número que se multiplica por 2 siempre da un producto par. Por lo tanto, la suma de los productos de ambas multiplicaciones puede ser par o impar en dependencia a si es par o impar el producto de la otra multiplicación. Pero si el número (multiplicado) se multiplica por un factor impar, entonces, el producto será par, si es par el multiplicando e impar, si el multiplicando es impar. O sea, por la suma de los productos de las dos multiplicaciones se puede saber si es par o impar aquel número que se multiplica por un factor impar.

116. Supongamos que A y B son dos números primos entre si y que, a y c son otros dos números también primos entre sí, además, A es múltiplo de a. Después de realizar las multiplicaciones correspondientes puede resultar la suma Ac + Ba, o bien, Aa + Bc. Es evidente que la primera es divisible por a, mientras que la segunda, no. Por lo tanto, para saber si B fue multiplicado o no por a, basta con determinar si se divide o no por a la suma obtenida por los participantes después de realizar las correspondientes multiplicaciones y adiciones.

117. Supongamos que los números pensados son a, b, c, d.... Con ellos realizamos las siguientes operaciones, con los dos primeros números:

$$(2a + 5) \times 5 = 10a + 25,$$
$$10a + 25 + 10 = 10a + 35$$
$$10a + 35 + b = 10a + b + 35$$

con el tercer número:

$$(10a + b + 35) \times 10 + c = 100a + 10b + c + 350$$

con el cuarto número:

$$100a + 10b + c + 350) \times 10 + d = 1000a + 100b + 10c + d + 3500$$

Y así sucesivamente.
De aquí queda claro que sustrayendo del resultado 35, 350, 3500, en independencia a la cantidad de números pensados, obtenemos un residuo con todos la números pensados, contando de izquierda a derecha.

Capítulo 10
Juegos con Números y Objetos

118. $1 = \sqrt[5]{\frac{5}{5}} = 5^{5-5}$ formula 11

119. 2= (5 + 5)/5

120. 4 = 5 - (5/5)

121. 5 = 5 + 5 − 5 = 5 x (5/5)

122. $0 = 5 \times (5 - 5) = \frac{5-5}{5} = \sqrt[5]{5-5} = (5-5)^5$ fórmula 12

123. Este problema es más complicado que los anteriores. He aquí algunas de sus soluciones:

$$31 = 3^3 + 3 + 3/3$$

$$31 = 33 - 3 + 3/3$$

$$31 = 33 - (3 + 3)/3$$

124. 100 = 5 x (-2 + +4) x (1 + 2 + 7)

125. Para salir vencedor hay que procurar pronunciar primero el número 89. Está claro que el que pronuncia este número gana pues, independientemente de la cifra que añada su competidor (diez o menos), inmediatamente puede encontrar la cifra correspondiente, cuya adición a la suma obtenida por su competidor da como resultado cien y con ello la victoria.

Pero para conseguir con seguridad pronunciar el primero "89" y después "100", es preciso asimilar las siguientes reglas sencillas.

Si comenzamos a sustraer de cien, de a once en once, hasta que sea posible, obtendremos una serie compuesta por las siguientes números: 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 112, 1. O si la escribimos en orden creciente, será 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.

Recordar estos números es muy fácil: basta con tomar el número límite, o sea, 10 y añadir a él 1 obtendremos 11. Después, tomar este número y todos los que de la multiplicación de 11 por 2, por 3, por 4, ..., por 8, obtendremos 11, 22, 33, 44,55, 66, 77, 88; si a continuación aumentamos cada uno de ellos en una unidad y comenzamos por esta unidad la nueva serie, obtendremos la misma serie de números que ya antes habíamos hallado: 1 , 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.

Ahora queda claro que si usted pronuncia "1", independientemente de la cifra (conforme a la condición, no superior a 10) que pronuncie su competidor, nunca le impedirá pronunciar a continuación "12"; del mismo modo, siempre podrá pronunciar 23 y luego 34, 45, 56, 67, 78 y 89.

Después que pronunciéis "89", sea cual sea el número (no superior a 10) que añada su competidor, usted expresará "cien" y ganará.

De lo dicho queda también claro que si ambos participantes conocen el secreto, ganará siempre aquel, quien pronuncie primero "uno", o sea, quien comience el juego.

126. Si ha asimilado bien la solución del problema anterior, entonces, no le será difícil ver cómo se debe obrar en cada caso concreto.

Supongamos, por ejemplo que el número acordado, por ejemplo, es 120 y que la cifra máxima que se puede agregar, como en el problema anterior, es 10. Entonces, está claro que tendrán que tenerse en cuenta los números 109, 98, 87,

76, 65, 54, 43, 32, 21, 10, o sea, comenzando desde 10, todos los números múltiplos de 11 aumentados en 10 unidades. De esto se desprende que el que conoce la solución de este problema ganará siempre que comience el juego.

Supongamos, por ejemplo, que el número acordado es 100, pero que el número máximo a sumar no es 10 como antes, sino 8. Es este caso hay que tener en cuenta los números 91, 82, 73, 64, 55, 46, 37, 28, 19, 10, 1, o sea, comenzando por la unidad, todos los números múltiplos de 9 aumentados en una unidad. También en este caso el que conoce el secreto siempre gana si él comienza el juego.

Pero si se acuerda que la cifra máxima a añadir es, por ejemplo, el 9, entonces, los números que se deben tener en cuenta serán: 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10.

Y en este caso, el que comience el juego puede perder, si es que el otro jugador conoce el secreto, ya que independientemente de la cifra que pronuncia el primero, el segundo, añadiendo a la suma una cifra correspondiente, siempre puede pronunciar 10, 20, etc., todos los números hasta 100.

127. Se pueden traspasar las cerillas así: la 4ª a la 1ª, la 7ª a la 3ª, la 5ª a la 9ª, la 6ª a la 2ª, la 8ª a la 10ª o de otra forma: la 7ª a la 10ª, la 4ª a la 8ª, la 6ª a la 2ª, la 1ª a la 3ª, la 5ª a la 9ª.

128. Si enumeramos las cerillas situadas en fila por 1, 2, 3,..., 15, entonces, el problema se resuelve mediante los siguientes 12 traspasos: la 2ª a la 6ª, la 1ª a la 6ª, la 8ª a la 12ª, la 7ª a la 12ª, la 9ª a la 5ª, la 10ª a la 5ª, la 4ª, entre la 5ª y 6ª, la 3ª, entre la 5ª y la 6ª, la 11 entre la 5ª y la 6ª, la 13ª al sitio correspondiente al número 11, 14ª el mismo sitio, la 15ª al mismo sitio.

129. Para demostrar un traspaso correcto de los discos, primero numeramos estos discos con las cifras 1, 2, 3, … 7, 8, comenzando por el disco de menor diámetro y después mostramos el procedimiento utilizando la tabla dada a continuación.

	Palillo A	Palillo Auxiliar	Palillo B
Antes de comenzar	1,2,3,4,5,6,7,8	-	-
Traspaso N° 1	2,3,4,5,6,7,8	1	-
Traspaso N° 2	3,4,5,6,7,8	1	2
Traspaso N° 3	3,4,5,6,7,8	-	1,2
Traspaso N° 4	4,5,6,7,8	3	1,2
Traspaso N° 5	1,4,5,6,7,8	3	2
Traspaso N° 6	1,4,5,6,7,8	2,3	-
Traspaso N° 7	4,5,6,7,8	3	1,2
Traspaso N° 8	5,6,7,8	1,2,3	4
Traspaso N° 9	5,6,7,8	2,3	1,4
Traspaso N° 10	2,5,6,7,8	3	1,4
Traspaso N° 11	1,2,5,6,7,8	3	4
Traspaso N° 12	1,2,5,6,7,8	-	3,4
Traspaso N° 13	2,5,6,7,8	1	3,4
Traspaso N° 14	5,6,7,8	1	2,3,4,
Traspaso N° 15	5,6,7,8	-	1,2,3,4

Por la tabla vemos que al palillo auxiliar, cuando está libre, se pasan solamente discos con números impares (1, 3, 5, etc.) y el palillo B sólo pares. Así, pues, para pasar los cuatro discos superiores fue preciso primero traspasar los tres primeros el palillo auxiliar, lo que, como vemos en la tabla, exigió siete traspasos por separado:

después fue traspasado el cuarto disco el tercer palillo (un traspaso más) y, por fin, los tres discos superiores del segundo palillo fueron traspasados el tercero y colocados sobre el cuarto disco (durante estos traspasos el palillo I desempeñaba el papel de auxiliar) lo que otra vez exigió siete traspasos por separado.

O sea, en general, manteniendo las condiciones dadas, para pasar de una columna de n cualesquiera discos, situados en vertical en orden decreciente, es preciso, primero traspasar n-1 discos superiores de dicha columna a uno de los palillo libres, luego pasar la base, o sea, el enésimo disco a otro palillo libre y por último, pasar todos los n - 1 discos al palillo en que se halla el enésimo disco.

Designando la cantidad indispensable de traspasos con la letra P y la cantidad de discos mediaste la letra n, tenemos,

$$P_n = 2P_{n-1} + 1.$$

Reduciendo el valor de n hasta la unidad y realizando la sustitución, hallamos con facilidad

$$P_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} +...+ 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

O sea, obtenemos la suma de una progresión geométrica, la cual nos da

$$P_n = 2^n - 1.$$

De este modo, para el caso de la pirámide, juguete de ocho discos, es preciso realizar 2^8 - 1 o sea 255 traspasos de los discos por separado.

Supongamos que el traspaso de un disco dura solamente un segundo, entonces. para traspasar una pirámide de 8 discos, serán necesarios mas de 4 minutos. En lo que se refiere al traspaso de una torre de 64 discos, para ello se necesitarán

18 446 744 073 709 551 615 segundos.

Lo que equivale a más de cinco mil millones de siglos.

130. Inesperadamente la respuesta resulta relacionada con el sistema binario de representación de números (véase la solución del problema 107. Representamos cada uno de los números 12, 10, 7 en el sistema binario:

12 - 1100
10 - 1010
7 - 111

En cada columna de la tabla resultante, a excepción de la extrema a la derecha, hay dos unidades. Durante la primera jugada, el jugador A obra de tal forma que en cada columna queden dos unidades o ninguna:

12-1100
10-1010
6-110

Con su jugada, el jugador B perturba esta propiedad mientras que el jugador A la restablece nuevamente:

1-1
7-111
6-110

Si seguimos el juego con atención veremos que cada jugada, con que responde el jugador A, restablece la propiedad indicada de la tabla, perturbada antes por el jugador B, o sea, que en cada una de sus columnas haya una cantidad par de unidades.

Denominaremos regular un sistema de tres números enteros no negativos, si después de la representación de cada uno de ellos por el sistema binario, cualquier columna contiene una cantidad de unidades par e irregular, en el caso contrario.

Es fácil ver que un sistema regular, después de cualquier jugada, se transforma en irregular y que cualquier sistema irregular, mediante una jugada irregular y que cualquier sistema irregular, mediante una jugada, siempre se puede transformar en regular. Para demostrarlo elegimos la columna situada más a la izquierda, cuya cantidad de unidades es impar, y los números que en dicha columna contienen la unidad los cambiamos por otros menores, de tal forma que resulte un sistema regular. Esto, por lo visto, siempre es posible.

Si el sistema inicial de números es irregular (como en nuestro ejemplo) entonces, el que comienza el juego siempre lleva ganancia. Para ello deberá, cada jugada, hacer una composición regular de los números. Si, el contrario, el sistema inicial es regular (por, ejemplo 12, 10, 6 ó 13, 11, 6) entonces, su competidor, si conoce el secreto del juego, ganará siempre, por mucho que usted se esmere en jugar. En este caso, conviene realizar jugadas arbitrarias con la esperanza de que su competidor se equivoque y después de su jugada el sistema se transforme en irregular. Entonces arrebatarle la iniciativa y llevar el juego hasta su final, victorioso para usted.

Se puedes distribuir las cerillas en 4, 5 y más montoncitos.

Usted ganará si juega de tal forma que, después de cada jugada suya, en cada columna haya una cantidad par de unidades.

Capítulo 11
El Dominó

132. Todo consiste en que preparándose para “adivinar" y cuando se dan vuelta "boca abajo” las fichas del dominó, trece de ellas deben colocarse en el orden que demuestra la fig. 163.

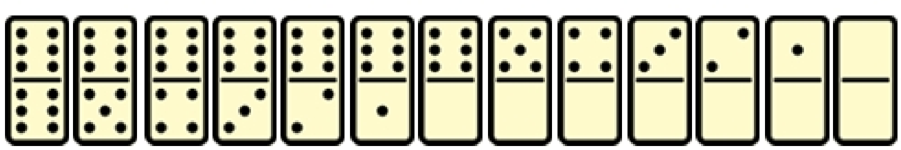


Figura 163

Como vemos, esta final de fichas representa una serie de los primeros doce números naturales, más el cero

12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0

y esta números van en orden decreciente. A la derecha de dicha final se colocan (también 'boca abajo") otras doce fichas en cualquier orden. Si ahora usted se retira a otro local y alguien traspasa de derecha a izquierda cierta cantidad (menor que doce) de fichas y las sitúa de tal forma que sigan a la izquierda después de la (6,6) entonces, al regresar, si descubre la ficha situada en el centro de la fila (o sea, la 13ª contando de izquierda a derecha) en ella verá precisamente tantos puntos, cuantas fichas fueron traspasadas en su ausencia.

Por qué resulta así es fácil comprenderlo. Cuando usted retira a otro local, ya sabe que en el centro de la fila está la ficha blanca, o esa (0-0). Supongamos que durante su ausencia se traspasó de derecha a izquierda una ficha. ¿Entonces, qué ficha se hallará ahora en el centro de la final? Naturalmente que (0-1), es decir, la "cero - uno". Si se traspasan dos fichas en el centro de la final se hallará la ficha con dos puntos; si se traspasan tres, la ficha con tres puntos, etc. En una palabra, la ficha mediana le mostrará, sin falta, la cantidad de fichas del dominó traspasadas de derecha a izquierda. (Debemos recordar que se pueden traspasar no más de 12 fichas).

El juego se puede proseguir. Otra vez retirarse a otro local proponer a alguien traspasar del extremo derecho de la fila al izquierdo otras cuatro fichas. Al regresar al local, descubrirá la ficha que indica la cantidad traspasadas de las mismas. Esta ficha ahora se sitúa a la derecha de la mediana y para hallarla será preciso contar de la mediana, tantas fichas, cuantas fueron traspasadas la vez anterior.

133. La suma de todos los puntos es igual a 168.

Convencerse de ello es posible realizando el cálculo directo, o sea, sumando los puntos ficha por ficha. Pero esto es aburrido y requiere mucho tiempo. Por lo tanto, obraremos de otra forma.

Supongamos que tenemos a muestra disposición dos juegos de dominó. Dividimos las 56 fichas en 28 pares, cada uno compuesto por dos fichas de diferente juego y, además, tales que la suma de los puntos en cada dos cuadrados de diferentes fichas

sea igual a 6. Por ejemplo: (3, 5) y (3, 1), (6, 4) Y (0, 2). (0, 6) y (6, 0)), (3, 3) y (3, 3) y así sucesivamente. Esto, como es lógico, resulta fácil. Entonces, la suma de puntos en cada par de fichero será igual a 12 y, por lo tanto, la suma de puntos en los dos juegos del dominó será igual a 28 x 12 = 336. Por consiguiente, las fichas de un solo juego contendrán en suma dos verse menos puntos, o sea, 168.
Comparar esta solución con el problema 38.

136. Supongamos que dicho cuadrado se puede construir. Entonces, trazamos tres líneas rectas, paralelas a la base de este cuadrado, que dividan los lados del mismo en cuatro partes iguales.

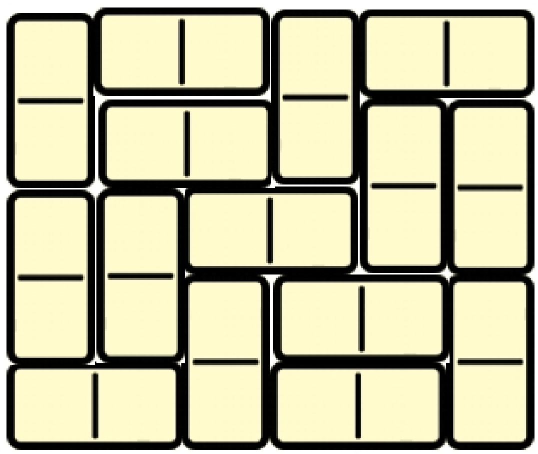


Figura 164

Conforme a las condiciones dadas, cada una de estas rectas debe cruzar por lo menos una ficha del dominó. Pero sobre cualquiera de estas rectas yace una cantidad par (4, 8 o 12) de cuadrados pequeños, iguales a la mitad de una ficha. Por lo tanto, cada recta cruza una cantidad par de fichas, lo que significa, no menos de dos. De tal forma, las rectas trazadas cruzan no menos de seis fichas. Si de forma análoga trazamos ahora tres rectas, paralelas a los lados del cuadrado, entonces, también ellas deberán cruzar lo memos de seis fichas. Pero como ni una ficha puede ser cruzada por dos rectas, en nuestro cuadrado debe haber por lo menos 12 fichas, lo que es imposible.

137. Construir un cuadrado, observando las condiciones dadas, es imposible. La demostración es exactamente la misma que para el problema anterior. Es preciso trazar cinco rectas, paralelas a los lados del cuadrado y cinco, paralelas a la base.

138. Construir un rectángulo así es posible. Una de las construcciones se muestra en la fig. 164.

Capítulo 12
El Juego de Damas

139. El problema se resuelve haciendo en 24 jugadas las siguientes transferencias de las fichas de una casilla a otra:

de la 6 a la 5, de la 2 a la 4, de la 4 a la 0
de la 4 a la 6, de la 1 a la 2, de la 2 a la 4
de la 3 a la 4, de la 3 a la 1, de la 3 a la 2
de la 5 a la 3, de la 5 a la 3, de la 5 a la 3
de la 7 a la 5, de la 7 a la 5, de la 7 a la 5
de la 8 a la 7, de la 9 a la 7, de la 6 a la 7
de la 6 a la 8, de la 8 a la 9, de la 4 a la 6
de la 4 a la 6, de la 6 a la 8, de la 3 a la 4.

140. La posición inicial de las fichas se muestra en la figura 165

O	•	O	•	O	•	O	•
1	2	3	4	5	6	7	8

Fig. 165

•	O	O	•	O	•	O		•
6	7	1	2	3	4	5		8

Fig. 166

Primera transferencia. A la izquierda tenemos dos casillas libres, pasamos a ellas las fichas 6 y 7. Resulta una distribución como en la fig. 166.

Segunda transferencia. Pasarnos las fichas 3 y 4 a las casillas libres y obtenemos la posición dada en la fig. 167.

Tercera transferencia. Pasamos las fichas 7 y l a las casillas libres, lo obtenido se muestra en la figura 168.

●	O	O	●		O	O	●	●
6	7	1	2		5	3	4	8

Fig. 167

●		●	O	O	O	O	●	●
6		2	7	1	5	3	4	8

Fig. 168

Cuarta transferencia. Por último pasamos a las casillas libres las fichas 4 y 8 y, con ello, obtenemos la posición exigida: se hallan en fila, una tras otra, cuatro fichas negras y cuatro blancas (fig. 169).

●	●	●	●	O	O	O	O
6	4	8	2	7	1	5	3

Fig. 169

O	●	O	●	O	●	O	●	O	●
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Fig. 170

●	O	O	●	O	●	O	●	O		●
8	9	1	2	3	4	5	6	7		10

•	O	O	•		O	•	•	O	O	•
8	9	1	2		5	6	4	7	3	10

•	O	O	•	•	O	O		O	•	•
8	9	1	2	6	7	5		3	4	10

•		•	•	O	O	O	O	O	•	•
8		2	6	7	5	9	1	3	4	10

•	•	•	•	•	O	O	O	O	O
8	4	10	2	6	7	5	9	1	3

Fig. 171

De esta distribución de las fichas se puede regresar a la posición inicial, realizando otras cuatro transferencias. Le dejamos el lector la resolución de este ejercicio inverso. Ahora ya no le será difícil.

•	O	O	•	O	•	O	•	O	•	O		•
10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9		12

•	O	O	•	O	•	O	•		O	O	•	•
10	11	1	2	3	4	5	6		9	7	8	12

•	O	O		•	O	•	•	O	O	O	•	•
10	11	1		4	5	6	2	3	9	7	8	12

•	O	O	•	•	•	O		O	O	O	•	•
10	11	1	6	2	4	5		3	9	7	8	12

•		•	•	•	O	O	O	O	O	O	•	•

10		6	2	4	5	11	1	3	9	7	8	12

●	●	●	●	●	●	O	O	O	O	O	O
10	8	12	6	2	4	5	11	1	3	9	7

Fig. 172

●	O	O	●	O	●	O	●	O	●	O	●	O		●
12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		14

●	O	O	●	O	●		O	●	O	●	O	O	●	●
12	13	1	2	3	4		7	8	9	10	11	5	6	14

●	O	O	●	O	●	●	O	O		●	O	O	●	●
12	13	1	2	3	4	8	9	7		10	11	5	6	14

●	O	O	●		●	O	O	O	●	●	O	O	●	●
12	13	1	2		8	9	7	3	4	10	11	5	6	14

●	O	O	●	●	●	●	O	O	O		O	O	●	●
12	13	1	2	4	10	8	9	7	3		11	5	6	14

●		●	●	●	●	O	O	O	O	O	O	O	●	●
12		2	4	10	8	9	7	3	13	1	11	5	6	14

Fig. 173

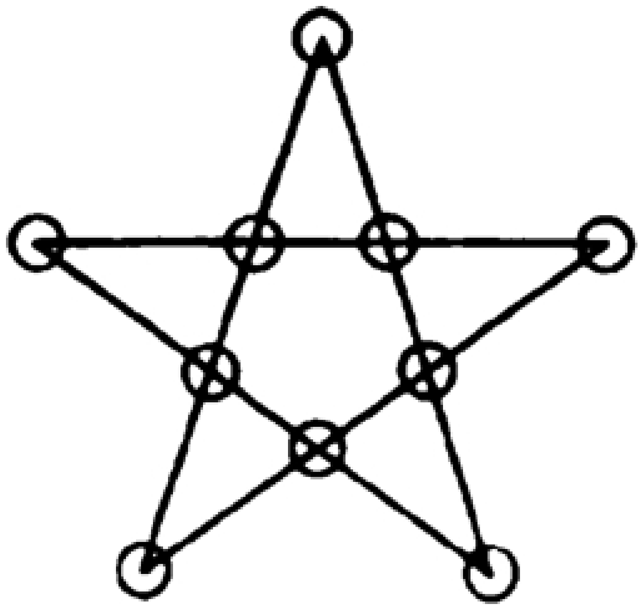
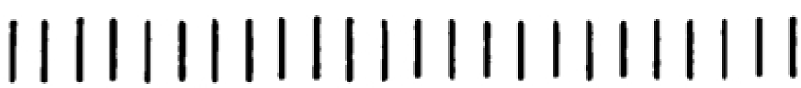


Figura 174



Figuras 175 y 176

141. La posición inicial de las fichas se muestra en la fig. 170. En la fig. 171 se dan loe traslados consecutivos de las fichas a realizar, que son:

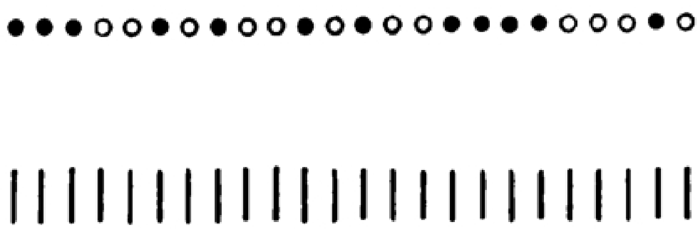
1. se pasan a las casillas libres las fichas 7 y 8
2. se pasan a las casillas libres las fichas 3 y 4
3. se pasan a las casillas libres las fichas 6 y 9.
4. se pasan a las casillas libres las fichas 9 y 1
5. por último, se pasan a las casillas libres las fichas 4 y 10.

142. La distribución inicial se da en la fig. 65. Las transferencias consecutivas se dan en la fig. 172.

143. La distribución inicial de los peones se da en la fIg. 65. Seis transferencias consecutivas es dan en la fig. 173. Después de ellas no será ya difícil determinar cómo realizar el séptimo y último traslado.

144. La solución se da en la figura 174.

145. Para resolver este problema las fichas deberán disponerse conforme a lo mostrado en la fig. 175.



Figuras 175 y 176

¿Cómo hallar esta solución? Colocamos en fila 24 cerillas (fig. 176).

Contando de 1 a 7, hallamos que por primera vez tenemos que retirar la 7, 14 y 21 cerillas. Las retiramos y comenzamos otra vez a contar de 1 a 7; primero contamos las tres cerillas situadas después de la 21; luego regresamos al comienzo de la fila, la cual contiene ahora solamente 21 cerillas. De ella, otra vez, tendremos que retirar la 4, 12 y 20 cerillas.

Repitiendo el procedimiento, a la siguiente vez, tendremos que retirar la 5, 15 y 24 cerillas, después la 10 y 22 y por último, la 9.

Quedarán en la fila 12 cerillas. Si ahora, en lugar de las 12 cerillas que quedaron ponemos fichas negras y en los lugares donde fueron retiradas las cerillas, fichas blancas, obtendremos la distribución exigida (fig. 175).

Capítulo 13

El Ajedrez

146. La solución viene dada en la fig. 177.

147. Para que el caballo recorra todas las 63 casillas libres deberán realizarse 63 jugadas. Observaremos que después de cada jugada el caballo cambia el color de la casa con respecto a la anterior en que se hallaba. Así que durante la jugada con el número 63 el caballo pasa a una casilla, cuyo color a diferente al de la casilla inicial. Pero, conforme a las condiciones dadas, después de esta jugada el caballo debe regresar a la casilla inicial. La contradicción surgida demuestra que el caballo no puede efectuar el recorrido necesario.
Exactamente lo mismo se puede razonar si en el tablero se pone cualquier cantidad impar de figuras.

148. Supongamos que la ruta del caballo, correspondiente a las condiciones del problema, existe. Entonces, numerarnos las 62 casillas libres del tablero, dando a la casilla inicial el número 1 ya las siguientes los números 2, 3,.... 62 en el mismo orden que pasa por ellas el caballo.

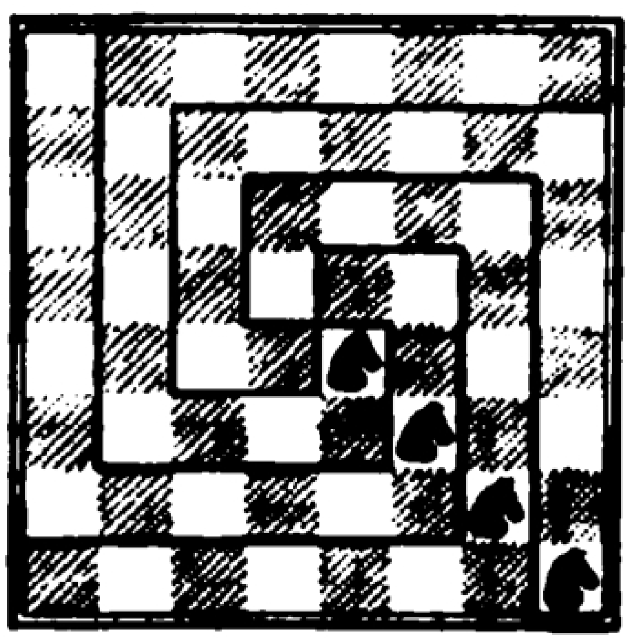


Figura 177

Puesto que el caballo es cada jugada cambia el color de la casilla, entonces, todas las casillas con números impares tendrán un mismo color y, por lo tanto, un mismo color poseerán también todas las casillas con números pares. Por consiguiente, la parte libre del tablero resulta compuesta por 31 casillas negras y 31 blancas. Más eso no es cierto, puesto que las casillas, ocupadas por los peones, son de mismo color. La ruta que buscamos no existe.

149. Distribuimos las letras a, b, c, d. e, f y la cifra 0, por las casillas centrales, tal como se muestra en la fig. 178. Después iremos anotándolas sucesivamente conforme pasa por ellas nuestro caballo.

a	*f*	*e*	*b*
e	*0*	*0*	*f*
f	*0*	*0*	*e*
d	*e*	*f*	*c*

Figura 178

De tal forma, obtendremos una cadena de 16 signos. De cualquier casilla, marcada con una letra, el caballo puede pasar a otra, marcada con otra letra, solamente a través de una de las casillas marcadas con el 0. Por lo tanto, en la sucesión, entre dos letras distintas cualesquiera, obligatoriamente habrá un 0. A continuación designamos cada grupo de letras iguales, situadas una el lado de otra mediante una sola letra del mismo nombre. Después de esto, en la sucesión quedarán, por lo menos, 6 letras, las cuales deberán estar separadas una de la otra por ceros. Está claro que los cuatro ceros, a nuestra disposición para ello, no son suficientes. Por lo tanto, el recorrido es imposible.

150. Como quiera que pasan los escarabajos de una casilla a otra, siempre quedará una casilla libre. En efecto, vamos a denominar negros aquellos escarabajos que al principio es hallaban en casillas negras y a los otros, blancos. Después que cada escarabajo pasa a la casilla contigua, todos los escarabajos aparecen en casillas

blancas. Tenemos 13 escarabajos negros y solamente 12 casillas blancas. Resulta, pues, que a una de las casillas blancas pasan por lo menos dos escarabajos. Pero entonces, una casilla del tablero queda libre, puesto que la cantidad de casillas es igual a la cantidad de escarabajos.

Exactamente la misma respuesta será en el caso de cualquier tablero con una cantidad impar de casillas. Su confirmación es la misma que en el caso anterior.

151. Los escarabajos pueden pasar a las casillas contiguas de tal forma que todas ellas resulten ocupadas. Para demostrarlo, dividimos el tablero de ajedrez en forma de bastidores cuadrados (fig. 179). Y suponemos que cada escarabajo, dentro de su bastidor, pasa a la casilla siguiente, moviéndose en el sentido de las manecillas del reloj. Con ello queda claro que cada casilla resultará ocupada.

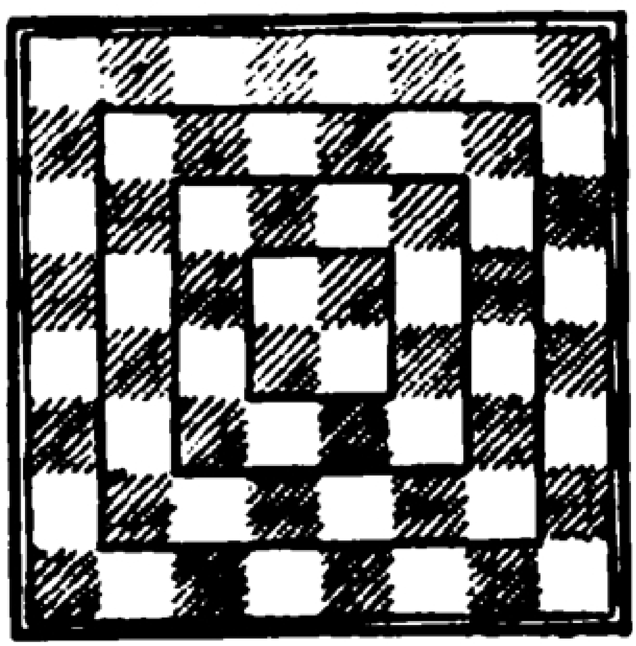


Figura 179

152. Es la fig. 180 se maestra una línea cerrada, que pasa por cada una de las casillas del tablero. Si el escarabajo se mueve a lo largo de esta línea en una misma dirección, entonces, recorrerá todo el tablero, conforme lo exigen las condiciones del problema.

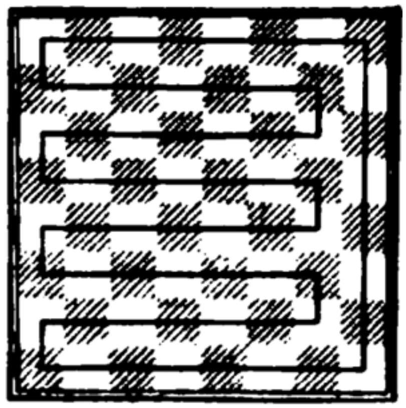


Figura 180

153. Si fuese posible hacerlo, entonces, resultaría cubierta una cantidad par de casillas, puesto que cada ficha del dominó cubre exactamente dos casilla. Pero la parte libre del tablero contiene 63 casillas. Por consiguiente resulta imposible.

154. Cada ficha del dominó, puesta sobre el tablero cubre una casilla negra y otra blanca. Por lo tanto, si cierta parte del tablero resulta cubierta por las fichas del dominó. Entonces, esta parte estará compuesta por igual cantidad de casillas negras y blancas. Pero los peones, puestos sobre el tablero, ocupan dos casillas de un mismo color, por lo tanto, en la parte restaste del tablero, la cantidad de casillas negras y blancas es distinta es distinta (en todo el tablero hay 32 casillas negras y 32 blancas). Resulta pues, que en dicho caso, el tablero no puede ser cubierto con fichas del dominó.
De las reflexionas que acabamos de hacer se deduce que si ponemos dos peones en cualesquiera casillas de un mismo color, la parte restante del tablero no puede ser cubierta con fichas del dominó.

155. Examinemos la línea cerrada, dada es la fig. 180. Si los peones se sitúan en dos casillas contiguas, entonces, esta línea se corta y quedará compuesta por un trozo que pasa por 62 casillas, además el color de estas casillas se alterna. Es fácil ver que si comenzamos a poner fichas del dominó a lo largo de esta línea, cubriremos toda la parte restante del tablero. Si los peones se hallan en casillas no

contiguas, entonces, la línea se corta en dos trozos que se cruzan. Al mismo tiempo, cada uno de ellos pasa por una cantidad de casillas par (los peones se hallan en casillas de diferente color). O sea, cada trozo de esta línea puede ser cubierto con fichas del dominó. Respuesta: independientemente de cómo se sitúen los peones en casillas diferente color, la parte restante del tablero siempre puede ser cubierta con fichas del dominó.

156. Si distribuimos las 32 figuras del ajedrez en las casillas blancas, todas ellas quedarán ocupadas y no habrá sitio para colocar la ficha del dominó (según acordamos, una ficha del dominó cubre dos casillas contiguas, una blanca y otra negra).

Demostremos que, independientemente a cómo estén distribuidas 31 figuras del ajedrez por el tablero, siempre quedará un espacio para colocar una ficha del dominó. Cubramos el tablero con 32 fichas del dominó (por ejemplo, a lo largo de la línea en la fig. 180). Después de ello, por mucho que nos esmeremos en cambiar la distribución de las 31 figuras del ajedrez por el tablero, por lo menos, una ficha del dominó quedará siempre libre, es decir, sobre ella no habrá ninguna figura del ajedrez. Con lo expuesto queda todo demostrado.

Capítulo 14
Problemas Combinatorios con Cuadrados

159. Claro que en todas las casillas del cuadrado se puede inscribir la cifra 2. El cuadrado numérico, así obtenido, satisface las condiciones del problema. Pero si se exige que entre estas haya por lo menos una impar, entonces, el problema ya no resulta tan fácil.

Ante todo, haciendo algunas pruebas, es fácil convencerse de que en el centro de cuadrado no se puede inscribir ni 1 ni 3. A este hecho se le puede dar una demostración rigurosa.

Supongamos que las cifras están distribuidas como se exige. Sumamos las cifras escritas en las diagonales y en la segunda columna (con ello, la cifra en el centro del cuadrado será tomada tres veces) y sustraemos del resultado las cifras inscritas en el primero y tercero renglones. La diferencia, como es fácil ver, será igual al triple de la cifra, escrita en el centro del cuadrado. Por otra parte, la suma de las cifras en las diagonales, en cada columna y en cada renglón es igual a 6; entonces, dicha diferencia deberá ser igual a 6. Por consiguiente, en el centro del cuadrado es ha escrito la cifra 2.

Luego es fácil ver que la suma de las cifras es igual a 6 sólo en aquellos casos cuando todas ellas son distintas o todas son iguales a 2. Par consiguiente, al menos en uno de las vértices del cuadrado debe estar escrita la cifra 2. Después de lo expuesto, las distribuciones requeridas son fáciles de hallar (fig. 181).

1	**3**	**2**
3	**2**	**1**
2	**1**	**3**

3	**1**	**2**
1	**2**	**3**
2	**3**	**1**

2	**1**	**3**
3	**2**	**1**
1	**3**	**2**

Figura 181

Todas ellas se obtienen de la primera valiéndose de las simetrías con relación a las diagonales (2, 2, 2), el segundo reglón y con relación a la segunda columna.

Para realizar una distribución (disposición) necesaria de las cifras se puede utilizar un procedimiento de fácil memorización.

Primero colocamos las cifras como es la fig. 182a. Después desplazamos las cifras situadas fuera del cuadrado ABCD correspondientemente, hacia abajo, hacia arriba, hacia la derecha o hacia la izquierda en tres casillas, de tal forma que caigan en una casilla libre del cuadrado. Como resultado obtendremos la distribución necesaria (fig. 182b).

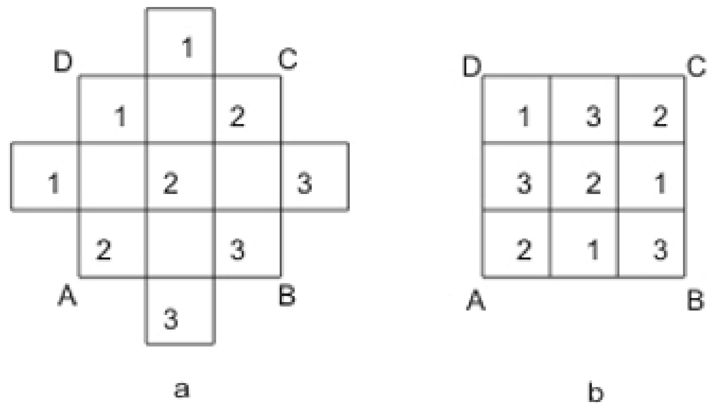


Figura 182

100. Obramos lo mismo que al final de la solución del problema anterior. Distribuimos las cifras, conforme se muestra en la fig. 183a, y luego desplazamos las cifras fuera del cuadrado en tres casillas correspondientemente, a la derecha, a la izquierda, hacia arriba y hacia abajo, de tal forma que todas ellas caigan en una casilla libre dentro del cuadrado. Con ello, obtendremos la disposición necesaria (fig. 185b).

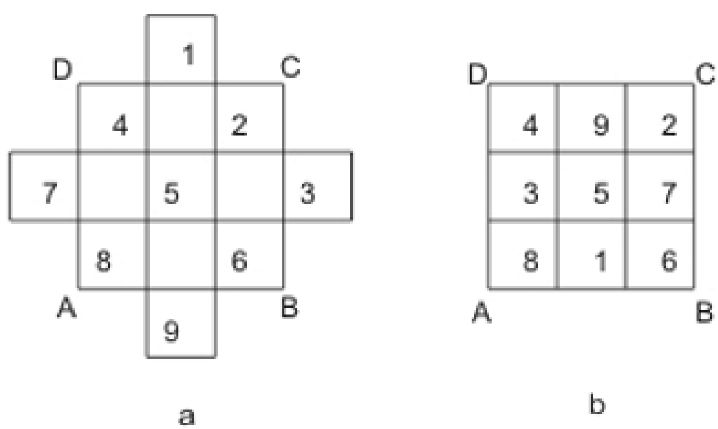


Figura 183

Para resolver este problema, también se pueden usar las correspondientes fichas del dominó (fig. 184).

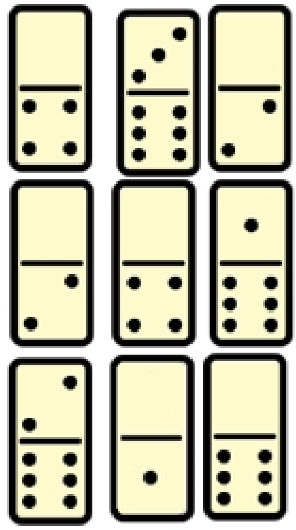


Figura 184

161. El procedimiento que venimos utilizando también nos ayudará en este caso. En cada uno de los lados del cuadrado de 25 casillas, construimos otras cuatro casillas (fig. 185) y en las casillas, dentro de a figura obtenida, en filas inclinadas, inscribimos sucesivamente las cifras de 1 a 25.

A continuación, desplazamos todas las cifras, situadas fuera del cuadrado ABCD en cinco casillas, correspondientemente hacia abajo, hacia arriba, a la izquierda y a la derecha. Después de ello, obtendremos la disposición exigida (fig. 186).

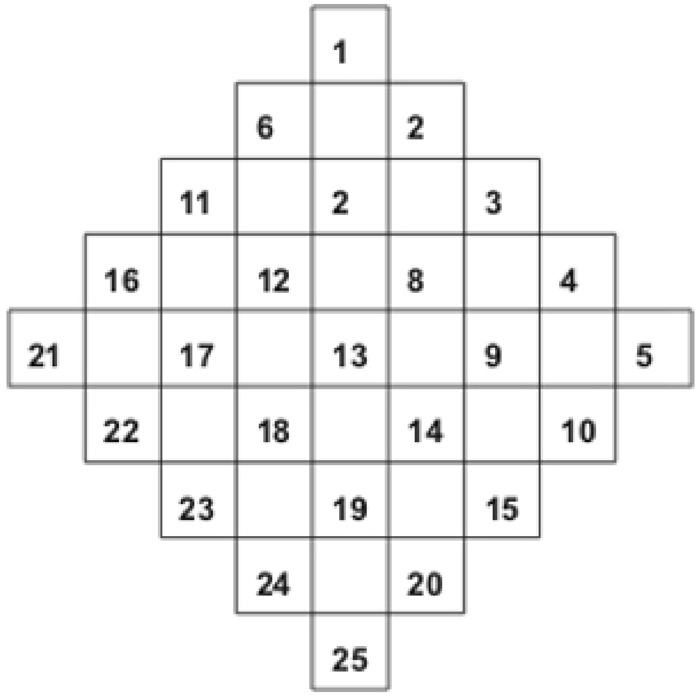


Figura 185

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Figura 186

162. El procedimiento, expuesto en los problemas anteriores, no permite, como es fácil ver, construir cuadrados mágicos de 16 casillas, no obstante existe gran cantidad de distribuciones que satisfacen las condiciones de este problema.

Sin examinar el procedimiento general para la resolución de problemas semejantes, brindamos solamente da respuestas (fig. 187).

4	5	14	11
1	15	8	10
16	2	9	7
13	12	3	6

3	2	15	14
13	16	1	4
10	11	6	7
8	5	12	9

Figura 187

El simple procedimiento utilizado para resolver los problemas 160 y 161, es válido para la construcción de cuadrados mágicos con cualquier cantidad impar de casillas. Lamentablemente, los procedimientos para la construcción de cuadrados mágicos con una cantidad par de casillas, son mucho más complicados.

163. Ante todo, supongamos que las letras son iguales. Escribamos una letra en una casilla cualquiera de la primera diagonal. Con ello, eu la segunda diagonal,
resultan prohibidas dos casilla, situadas en una fila por la horizontal y vertical por la casilla ya ocupada.
En una de las dos casillas restantes de la segunda diagonal se puede escribir la segunda letra. Más adelante es fácil ver que las dos letras, escritas en las diagonales determinan estrictamente la distribución de la dos letras restantes conforme a las condiciones del problema (fig. 188).

a			
		a	
			a
	a		

Figura 188

En conclusión, si se fija el lugar de las letras en la primera diagonal, el problema tiene dos soluciones. Pero como quiera que la primera letra puede ser inscrita en cualquier casilla de la primera diagonal, el problema tiene 2 x 4 = 8 soluciones. Puesto que cuatro letras distintas pueden distribuirse de 24 formas, entonces en este caso, el problema tiene 8 x 24 = 192 soluciones.

164. Supongamos que hemos distribuido las letra tal como lo exige el problema. Cambiamos de lugar da columnas o filas cualesquiera. Resulta una nueva posición de las letras, que también satisfacen las condiciones del problema. Es evidente que las columnas y las filas pueden ser cambiadas de lugar, de tal forma que en la de arriba y en la columna de la izquierda las letras es distribuyen en un orden como el dado en la fig. 189.

a	b	c	d
b			
c			
d			

Figura 189

A semejantes disposiciones de las letras las denominamos principales. Hallemos entonces, todas las distribuciones principales de nuestras letras. Es fácil ver que en la segunda fila las letras a, c, d pueden ser distribuidas solamente de tres formas: (c, d, a), (d, a, c), (a, d, c).

A las dos primeras les corresponden disposiciones únicas de las letras en la tercera y cuarta filas; a la tercera forma le corresponden dos disposiciones. O sea, tenemos en total cuatro disposiciones principales de las letras, que representamos en la figura 190.

a	b	c	d
b	c	d	a
c	d	a	b
d	a	b	c

a	b	c	d
b	d	a	c
c	a	d	b
d	c	b	a

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	b	a
d	c	a	b

Figuras 190

De cada disposición principal, mediante permutaciones de las columnas, se pueden obtener 24 disposiciones nuevas. A su vez, de cada disposición nueva de les columnas, mediante el traspaso de la segunda, tercera y cuarta fila, se pueden obtener otras 6 disposiciones nuevas de las letras. Evidentemente, todas estas distribuciones son distintas. O sea, existen 4 x 24 = 576 disposiciones diferentes de letras, que satisfacen las condiciones del problema.

165. Para abreviar designaremos los grados de oficialidad con las siguientes letras: A, comandante; B, cadete; C, capitán; D, teniente y los números de los regimientos con las cifras 1, 2, 3, 4. Entonces, es lógico que cada oficial se caracterizará mediante una letra y una cifra. Por ejemplo, (C, 3), capitán del tercer regimiento.

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

(A,1)	(B,4)	(C,2)	(D,3)
(D,2)	(C,3)	(B,1)	(A,4)
(B,3)	(A,2)	(D,4)	(C,1)
(C,4)	(D,1)	(A,3)	(B,2)

Figura 191 y 192

Por consiguiente, el problema se reduce a la distribución de cuatro letras A, B, C, D, y cuatro cifras 1, 2. 3, 4 en 16 casillas de un cuadrado, de tal forma que en cada fila de casillas por la horizontal y vertical no haya letras y cifras iguales. Además todos los pares (letra, cifra) deberán ser diferentes.

Primero distribuimos las letras (véase el problema anterior) tal como se muestra en la figura 191.

Para disponer las cifras, agregamos a cada letras la cifra correspondiente conforme a su orden (o sea a todas las A le añadimos 1; a todas las B, 2; a todas las C, 3, y a todas las D, 4) después traspasamos cada cifra a la casilla simétrica con relación a la diagonal (A, B, C, D). Como resultado obtenemos la fig. 192. Esta distribución es la respuesta al problema planteado.

166. Examinemos un cuadrado de 16 casillas. Supongamos que sus filas corresponden a los jugadores del primer equipo, y sus columnas a los jugadores del segundo equipo.

Inscribimos en las casillas del cuadrado pares de cifras de la siguiente forma: tomamos la distribución de las letras y cifras para el problema anterior y cambiamos cada letra por la cifra correspondiente a dicha letra (AΨ 1, BΨ 2, CΨ 3, DΨ 4). Como resultado obtenemos fig. 193.

I \ II	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,4)	(3,2)	(4,3)
2	(4,2)	(3,3)	(2,1)	(1,4)
3	(2,3)	(1,2)	(4,4)	(3,1)
4	(3,4)	(4,1)	(1,3)	(2,2)

I \ II	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	3	2	1
3	2	1	4	3
4	3	4	1	2

Figura 193 y 194

Supongamos, ahora, que la primera cifra en cada casilla indica el número de la serie de partidas, durante la cual se baten los jugadores de la fila y columna en que se halla dicha casilla. Si la segunda cifra es impar, entonces, el jugador del primer equipo juega con figuras blancas y en el caso contrario, con figuras negras. Puesto que cualquier cifra, situadas en el primer lugar, se halla en cada fila y en cada columna una sola vez, entonces, en cualquier serie de partidas juegan todos los ajedrecistas, cada uno de ellos con un competidor determinado. Demos tramos que un horario de partidas así satisface todas las condiciones del problema.

Como quiera que en cada fila y en cada columna, en segundo lugar van escritas las cifras 1, 2, 3, 4 en un orden determinado, cada jugador deberá jugar dos partidas con piezas blancas y dos con las negras. Como todos los pares de cifras son distintos, eligiendo cualesquiera cuatro pares correspondientes a una serie de partidas, o sea, con una misma cifra en el primer lugar (numero de serie), obtendremos en los segundos lugares las cifras 1, 2, 3, 4, distribuidas en un orden determinado. Esto significa que en dicha serie los jugadores del primer equipo van a jugar dos partidas con figuras blancas y dos con las negras. Este horario se ve con mayor claridad en la fig. 194. En él, el color de la casilla significa el color de las figuras con que debe jugar el representante del primer equipo, y la cifra, el número de la serie de partidas durante las cuales se encuentran los competidores.

A continuación damos la descripción de algunos procedimientos para la construcción de cuadrados latinos con dimensiones arbitrarias. Acordamos designar con números enteros los elementos de estos cuadrados, de dimensiones n x n.

I. Supongamos que p es un número primo y que n = p - 1. Numeramos las filas del cuadrado de arriba abajo y las columnas de izquierda a derecha con cifras de 1 a n. En las intersecciones de una fila con el número a y de una columna con el número b escribimos el residuo de la división de los números ab por p. Puesto que la numeración de las filas y columnas consta de cifras positivas y enteras, no divisibles por p entonces, en cada casilla del cuadrado se escribirá una de las cifras 1, 2,..., n.

Demostremos que en cada fila estas cifras son diferentes.

Si en la fila a estuviesen inscritas dos cifras iguales, digamos en las columnas con los números b, c, esto supondría que las cifras ab, ac dan residuos iguales de la división por p y, por lo tanto, su diferencia a(b - c) es divisible por p. Pero ambos factores a y (b - c) son diferentes de cero y su valor absoluto inferior a p. Por consiguiente, no puede haber divisibilidad; las cifras ab y ac dan distinto resto de la división por p. Exactamente lo mismo se demuestra que en cualquier columna del cuadrado están inscritas distintas cifras. Puesto que las filas y columnas contienen n casillas cada una, y como la mayor cantidad posible de obtener restos nulos de la división por p es también igual a n, entonces, cada fila y cada columna representarán cierta permutación de las cifras 1, 2,..., n.

Si construimos un cuadrado latino por este procedimiento, dando p = 5 y después reemplazamos las cifras 1, 2, 3, 4 por las letras a, b, c, d ¿respectivamente, obtendremos el segundo de los cuadrados dados en la fig. 190.

II. Sea n un número arbitrario entero y positivo, y k otro número entero que no tiene con a divisores comunes. En la intersección de la fila con el número a, y de la columna con el número b, escribimos el residuo de la división de ak+b por a. Si en la intersección de las columnas b, c con la fila a se tienen números iguales, entonces la diferencia ak + b - (ak + c)= b - c debe dividirse por n. Pero eso es imposible, ya que b, c son números enteros diferentes, incluidos en los límites de 1 a n. Supongamos que en cierta columna digamos, en la b, tenemos números iguales. Si las filas correspondientes tienen la numeración u, v entonces, la diferencia uk + b - (vk+b) = (u - v)k debe dividirse por a. Puesto que los números 1 y n no tienen divisores comunes, la expresión u - v debe dividirse por a. Pero esto es imposible. O sea, en cada fila y en cada columna estaría inscritos diferentes números, lo que significa, el igual que antes, que las columnas y filas del cuadrado representan cierta permutación de las cifras 0,1, 2,..., n - 1.

Siendo n = 4 y k = 1 y reemplazando las cifras 0, 1, 2, 3, por las letras c, d, a, b respectivamente, el cuadrado, constituido por esta procedimiento, coincide con el primero en la fig. 190.

Utilizando este mismo procedimiento y dando a k distintos valores, se pueden construir distintos cuadrados latinos.

Supongamos que n es un número primo impar, que k y l son números diferentes, incluidos dentro del intervalo 0, 1,..., n - 1, y que mediante el procedimiento ya expuesto, para cada uno de ellos ha sido construido un cuadrado latino.

Vamos a comprobar si estos pares de cuadrados resuelven un problema semejante al 165; en él participan representantes de n regimientos con diferente jerarquía (graduación). Supongamos que durante la superposición de los cuadrados en dos casillas distintas resultan iguales pares de números. Si estas casillas se sitúan en las filas a y u y en las columnas b y v respectivamente, entonces, ambas diferencias

$$ak + b - (uk + v) = (a - u)k + b - v,$$
$$al + b - (ul + v) = (a - u)l + b - v$$

se dividen por n. De ello a deduce que por a se divide la diferencia

$$(a - u)k - (a - u)l = (a - u)(k - l).$$

Pero esto es posible solamente en el caso de $a = u$ y, entonces, por a deberá dividirse la diferencia b - v. Por consiguiente, b = v y estas casillas deben coincidir.
Los pares de cuadrados latinos que resuelven el problema 165 para cierto número n, permiten componer el horario de partidas de un torneo de ajedrez con n participantes, obrando de forma semejante a como fue resuelto el problema 166. Es curioso que cuando n = 6 este horario puede ser compuesto, pese a que el problema 165 es irresoluble.

Capítulo 15
La Geometría de Viaje

167. A primera vista parece estar claro que la araña debe recorrer el techo por la diagonal CE y después bajar donde la mosca, por la esquina EK.
Pensándolo un poco, hallamos otro camino para la araña: ésta puede recorrer la pared lateral por la diagonal CP y acercarse a la víctima por EK.
Y, por último, la araña también puede acercarse por CA y por AK.
El paralelepípedo es simétrico con relación el centro de la diagonal CK, por lo tanto, cada uno de los caminos CDK, CBK y CGK es igual de largo a uno de los tres caminos, antes trazados.
¿Cuál de ellos es el más corto?

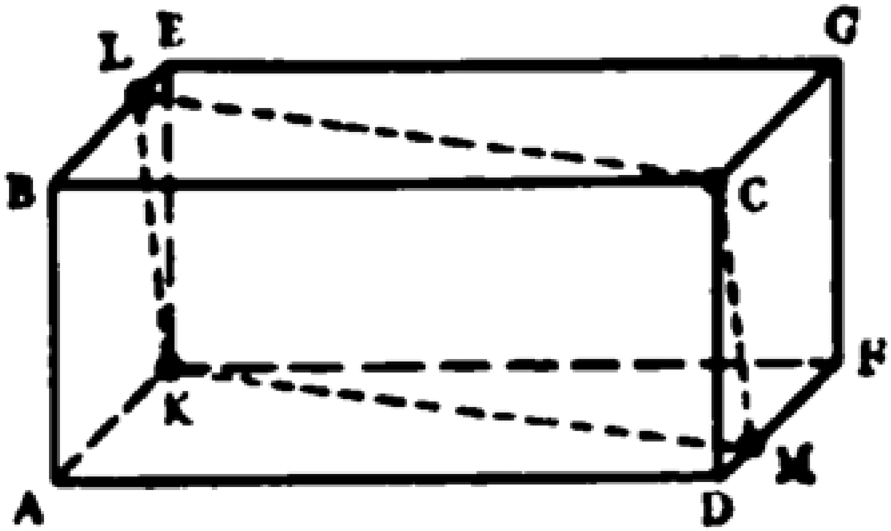


Figura 195

Resulta que ninguno de los tres. Existen otros caminos aún más cortos, a cuya búsqueda nos dedicaremos. Teniendo en cuenta la simetría del paralelepípedo podemos considerar que el camino más corto de la araña no pasa por la pared lateral ABEK. En efecto la longitud del camino KLC, por ejemplo, es igual a la longitud del camino KMC (fig. 195). Por consiguiente se puede considerar que el camino cruza una de las aristas EG, GF, FD, AD. Teniendo en cuenta la simetría de las aristas AD, EG, será suficiente considerar que el camino cruza EG, GF y FD.

Desarrollamos en el plano el paralelepípedo que representa nuestro local. Obtendremos el dibujo representado en la fig. 196.

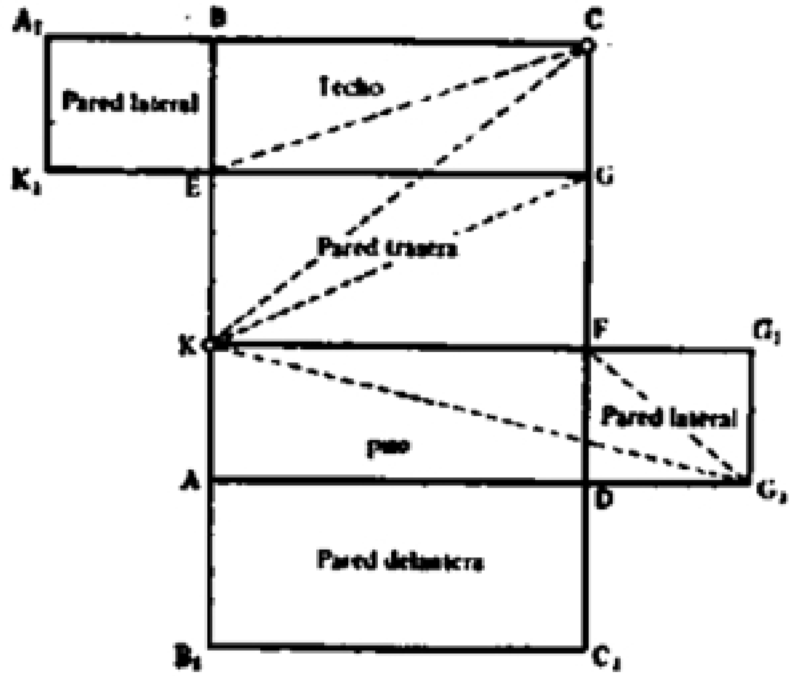


Figura 196

La araña está en el punto C y la mosca, en el punto K. Ahora vemos con claridad que los caminos CEK y CGK que en el dibujo no desarrollado nos parecían los más cortos, de hecho, no lo son. Basta con unir los puntos C y K, mediante una línea recta, para obtener un camino notablemente reducido. Este último será el más corto entre todos los demás caminos que cruzan la arista KG. De forma análoga, el camino KC, será el más corto entre todos los caminos que cruzan la arista FD (el punto C_2 también corresponde al vértice C de nuestro paralelepípedo). Concretamente, será más corto que el camino CFK.

Pan imaginarse el camino más corto entre todos los que cruzan la artista GF, desarrollemos el local tal como se ve en la fig. 197.

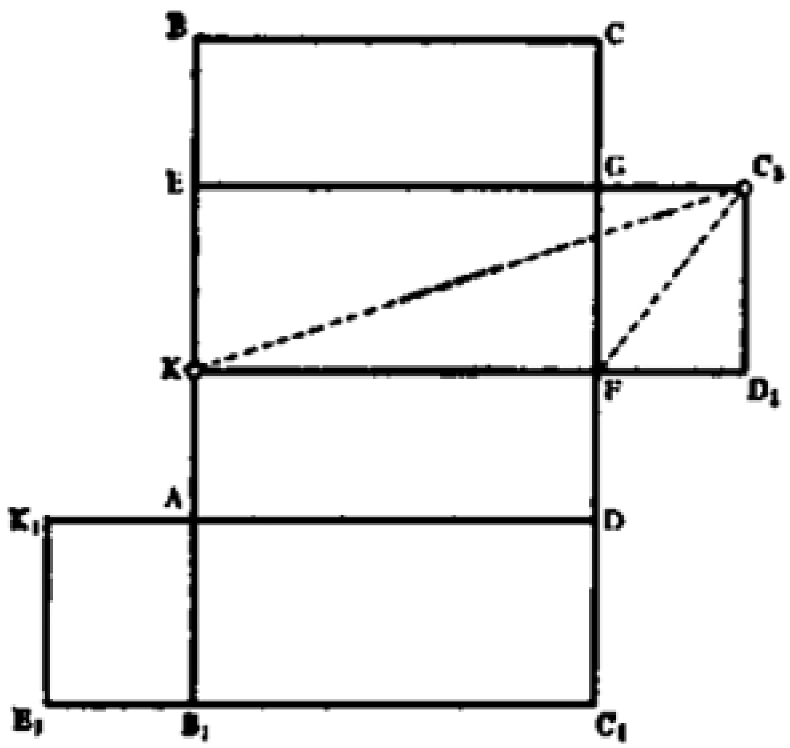


Figura 197

Con ello, vemos que KC_3 es el camino más corto entre todos los que cruzan la arista GF.

Nos queda solamente determinar cuál de esos tres caminos (KC, KC_2, KC_3) es el más corto. Resulta que ello depende de las dimensiones relativas del local (largo, ancho, alto).

Designemos la longitud AD del cuarto por a, su altura AB por b y su ancho AK por c. Entonces, de las figs. 196 y 197 tenemos:

$$|KC| = \sqrt{a^2 + (b+c)^2}$$
$$|KC_2| = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$$
$$|KC_3| = \sqrt{(a+b)^2 + b^2}$$ formula 13

Quitando los paréntesis, e igualando mutuamente las expresiones subradicales, vemos que éstas se diferencian una de otra solamente por los términos 2bc, 2ab, 2ac.

Dividiendo las tres multiplicaciones por 2abc, obtenemos:

$$1/a,\ 1/b,\ 1/c$$

De aquí vemos que
si $a > b$, $a > c$, el camino mis corto será KC;
al ser $c > a$, $c > b$, el camino más corto será KC_2;
si $b > a$, $b > c$, el camino más corto será KC_3.

Entonces, hallamos que el camino mas corto de la araña debe cruzar la arista más larga entre

EG, GF, FD.

El problema sobre la araña y la mosca resultó mucho más complicado que podía pensarse a primera vista.

169. Tenernos solo dos territorios impares D y E. Todos los demás son pares. Teniendo en cuenta las reflexiones generales, hechas antes del planteamiento del problema, podemos afirmar que éste es resoluble.
Además, sabemos que el recorrido debe comenzar desde un territorio impar D o E.
El recorrido, pasando por todos los puentes, puede ser el siguiente:

EaFbBcFdAcFICgAhCiDkAmEnApBgEID,

o también en dirección contraria. Las letras minúsculas, entre las mayúsculas, indican qué puentes se pasan concretamente.

170. Investigando la posibilidad de resolución de este problema, inmediatamente vemos que Finlandia, España y Dinamarca tienen un número impar de fronteras con los países vecinos, o sea, la cantidad de territorios impares es superior a dos. Por consiguiente, el viaje que se propone realizar el contrabandista, es imposible.

171. Véase la fig. 198.

172. Representemos cada obrero y cada torno en una hoja de papel en forma de puntos. Tendremos en total 20 puntos diferentes. A continuación, trazamos desde cada punto, que representa a un obrero, dos líneas hasta los puntos que representan los tornos en los cuales este obrero sabe trabajar. Obtendremos una red compuesta por 20 puntos y 20 líneas, además, de cada punto, independientemente de que corresponda a un obrero o a un torno, parten dos líneas.

La red obtenida se descompone en varios trozos tales, que en los límites de uno de ellos se puede pasar por las líneas de la red desde cada uno de los puntos hasta cualquier otro. Si los puntos pertenecen a diferentes trozos, entonces, no existe un camino que los una. Puesto que en cada trozo todos los vértices son pares, dicho trozo puede ser trazado de una plumada. Si en cada línea de la red indicamos con una flecha la dirección del trazado, entonces, de cada punto partirá una sola línea.

La línea, que parte del punto que representa a un obrero, finaliza en un punto que representa un torno, en el cual este obrero debe trabajar.

Esta afirmación sigue siendo válida si sustituimos la cantidad de 10, dada en el problema, por otra entera cualquiera no menor de 2. La solución será la misma.